ФИЗИКА

В.А. Бубнов

О скорости распространения энергии в гидродинамических течениях

В работе приводится вывод формулы скорости распространения энергии в гидродинамических течениях идеального газа, уравнения движения которого используются в формуле, предложенной автором данной статьи в его ранних работах. Эта формула в частных случаях переходит в формулу Н.А. Умова, которую он получил для несжимаемой жидкости. В работе также получены формулы, определяющие зависимость плотности от составляющих гидродинамической скорости, из которых следует, что величина плотности неограниченно возрастает при приближении указанных скоростей к скорости звука.

Ключевые слова: энергия; скорость; жидкость; второй закон Ньютона; плотность; давление; масса частицы.

Проблема раскрытия общей связи между распределением и движением энергии в средах и перемещениями частиц независимо от частных форм движений впервые сформулирована выдающимся русским физиком Н.А. Умовым (1846–1915) в его докторской диссертации под названием: «Уравнения движения энергии в телах» [9]. Им же определен и путь решения этой формулы.

Суть рассуждений Умова такова. Количество энергии в элементе объема среды, отнесенное к единице объема, названо им плотностью энергии в данной точке среды. Действительно, обозначим через E плотность энергии в произвольной точке среды, а через g_x, g_y, g_z скорости, с которыми движется энергия вдоль осей x, y, z в рассматриваемой точке среды. Очевидно, что элемент объема среды равен $dxdydz$. При введенных обозначениях количества энергии, входящими и выходящими через различные стороны элемента будут:

через сторону $dydz$ и ей параллельную:

$$Eg_x dydz \text{ и } -\left[Eg_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(Eg_x\right)dx\right]dydz;$$

через сторону $dxdz$ и ей параллельную:

$$Eg_y dxdz \text{ и } -\left[Eg_y + \frac{\partial}{\partial y}\left(Eg_y\right)dy\right]dxdz;$$

через сторону $dxdy$ и ей параллельную:

$$Eg_z dxdy \text{ и } -\left[Eg_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(Eg_z\right)dz\right]dxdy.$$

Произведем построчное сложение вышеприведенных соотношений, после чего получим следующие величины потоков энергии. А именно выражение:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(Eg_x\right)dxdydz,$$

определяющее величину потока энергии, прошедшей через сторону *dxdz* в направлении оси *x*. Аналогично в направлении оси *y:*

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(Eg_y\right)dxdydz,$$

и в направлении оси *z*:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(Eg_z\right)dxdydz.$$

Сумму этих потоков Н.А. Умов приравнивает к величине

$$\frac{\partial E}{\partial t}dxdydz,$$

которая определяет изменение количества энергии *Edxdydz* в элементе объема со временем *t*. Далее после сокращения величины энергии на величину *dxdydz,* Умов получает следующее равенство:

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Eg_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Eg_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(Eg_z\right)\right]. \qquad (1)$$

Это соотношение, по мнению Н.А. Умова, показывает, как величина *E,* поступившая в единицу времени *t* в выделенной объем, перераспределяется в потоках энергии в направлении осей *x, y, z.*

После умножения обеих частей соотношения (1) на величину объема $d\omega = dxdydz$ и интегрирования на всю среду получаем вместо (1):

$$\iiint\frac{\partial E}{\partial t}d\omega+\iiint\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Eg_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Eg_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(Eg_z\right)\right]d\omega=0. \qquad (2)$$

Тройные интегралы, входящие в (2) говорят о том, что данное соотношение есть закон сохранения энергии в форме, установленной Н.А. Умовым. Скорость распространения энергии, входящая в (2) через составляющие g_x, g_y, g_z, подлежит определению; при этом $g^2=g_x^2+g_y^2+g_z^2$. Чтобы это сделать, Н.А. Умов законы движения различных сред специальным приемом преобразовывает в законы движения энергии для указанных сред, форма которых совпадает с соотношением (2).

Продемонстрируем этот прием Умова на примере вывода уравнения движения энергии в гидродинамических течениях. Для этого воспользуемся следующей новой формой уравнения движения жидкости, лишенной трения, предложенной автором в работах [2; 3; 4]:

$$\left.\begin{aligned} c\frac{du}{dt} - c_1 u div\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ c\frac{dv}{dt} - c_1 v div\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ c\frac{dw}{dt} - c_1 w div\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь — вектор гидродинамической скорости, составляющие которого u, v, w вдоль осей x, y, z соответственно: ρ — плотность жидкости, p — гидростатическое давление, а через формулу

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

обозначен оператор полной производной, введенный в гидродинамику Эйлером. Уравнение (3) получено автором [2] на основе следующих представлений. Известно, что уравнения гидродинамики выводятся из второго закона движения Ньютона, сформулированного для материальной точки. Однако Ньютон в своем сочинении [8] не представил формульный вид данного закона, а изложил только его следующую формулировку [8: с. 40]: «изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует».

В рамках этой формулировки при выводе уравнений гидродинамики [2; 3; 4] формула второго закона Ньютона написана так:

$$c\frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right) = \vec{F}, \qquad (4)$$

где m — масса материальной точки, $\vec{V}$ — вектор ее скорости, $\vec{F}$ — вектор действующей силы, а c — коэффициент пропорциональности, который в рамках существующей системы единиц есть некое число, как положительное так и отрицательное.

Если масса m материальной точки суть величина переменная, то уравнение (4) надо переписать так:

$$cm\frac{d\vec{V}}{dt} + c\vec{V}\frac{dm}{dt} = \vec{F}. \qquad (5)$$

Все величины, входящие в (5), отнесем к единице объема частицы жидкости и тогда получим:

$$c\rho\frac{d\vec{V}}{dt} + c\vec{V}\frac{d\rho}{dt} = \vec{P}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) является исходным для вывода системы (3), причем под вектором $\vec{P}$ подразумевается поверхностная сила. При вычислении величины $\frac{d\rho}{dt}$ [2; 3; 4] появляется дополнительный параметр $c_1 = c\left(1 - \frac{W_0}{W}\right)$, где W_0 — начальный объем частицы жидкости, а W — объем по истечении времени t.

Для дальнейших рассуждений полагаем: $c_1 = 0$, после чего систему (3) переписываем в следующем виде [6]:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= c\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= c\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= c\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В [7] показано, что система уравнений (7) допускает интеграл

$$p + c\frac{\rho V^2}{2} = const, \tag{8}$$

форма которого справедлива как для несжимаемой жидкости, так и для сжимаемой. Заметим, что соотношение (8) при $c = 1$ переходит в известный интеграл Бернулли. Кроме соотношений (7)–(8) в дальнейшем будет использовано общеизвестное уравнение неразрывности в следующих двух формах:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{10}$$

Для вывода уравнения движения энергии из системы (7) использовался прием Н.А. Умова, согласно которому умножим каждое из соотношений в (7) на составляющие скорости u, v, w соответственно, затем на элемент объема $d\omega$ и интегрируем их соотношение на всю среду, после чего получим:

$$\begin{aligned} &c\iiint \frac{\rho}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t} d\omega + \frac{c}{2}\iiint \left[\rho u \frac{\partial V^2}{\partial x} + \rho v \frac{\partial V^2}{\partial y} + \rho w \frac{\partial V^2}{\partial z}\right] d\omega + \\ &+ \iiint \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right) d\omega = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь квадрат гидродинамической скорости определен как

$V^2 = u^2 + v^2 + w^2$.

Далее применяем формулу интегрирования по частям в рамках одномерного интеграла, после чего третье слагаемое в (11) преобразовываем так:

$$\iiint \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} \right) d\omega = -\iiint p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\omega + \\ + \iint p(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)ds, \qquad (12)$$

где элементарная поверхность ds выражается следующим образом через углы α, β, γ, образованные внешней нормалью с поверхностью S,

$ds \cdot \cos\alpha = dydz,\ ds \cdot \cos\beta = dxdz,\ ds \cdot \cos\gamma = dxdy.$

Аналогично преобразовываем и второе слагаемое в (11), так что

$$\frac{c}{2}\iiint \left(\rho u\frac{\partial V^2}{\partial x} + \rho v\frac{\partial V^2}{\partial y} + \rho w\frac{\partial V^2}{\partial z} \right) d\omega = \\ = \frac{c}{2}\iint \rho V^2 (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)ds - \\ - \frac{c}{2}\iiint V^2 \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) d\omega. \qquad (13)$$

Затем тройной интеграл в правой части соотношения (12) преобразовываем с учетом уравнения неразрывности в форме (10) и получаем:

$$-\iiint p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\omega = \iiint \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} d\omega, \qquad (14)$$

а при преобразовании тройного интеграла в правой части (13) используем уравнение неразрывности в форме (9), после чего будем иметь

$$-\frac{c}{2}\iiint V^2 \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) d\omega = \iiint \frac{c}{2} V^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega. \qquad (15)$$

Соотношения (12) – (15) позволяют уравнению (11) придать следующий вид:

$$\iiint \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c\rho V^2}{2} \right) + \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \right] d\omega + \\ + \iint \left(p + \frac{c\rho V^2}{2} \right)(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)ds = 0. \qquad (16)$$

Нетрудно показать, что согласно известной в математическом анализе теоремы Остроградского – Гаусса имеет место равенство:

$$\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[v\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left[w\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)\right]\right\}d\omega= \qquad (17)$$
$$=\iint\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)ds.$$

Соотношение (17) позволяет уравнению (16) придать окончательный вид:

$$\iiint\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c\rho V^2}{2}\right)+\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right]d\omega+\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left[v\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[w\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)\right]\right\}d\omega=0. \qquad (18)$$

Двойной интеграл в (16) и равный ему второй интеграл в (18) представляет количество энергии, входящее в среду через ее границы. Следовательно, выражение (18) представляет закон сохранения энергии для всей жидкой среды, и поэтому оно тождественно с уравнением (2).

Для вычисления второго слагаемого в подынтегральном выражении первого интеграла соотношения (18) будем использовать известное выражение Пуассона:

$$p=const\cdot\rho^{\frac{1}{\varepsilon}}, \qquad (19)$$

где ε есть отношение теплоемкостей при постоянном объеме и постоянном давлении, которое для воздуха равно 0,71.

Заметим, что формула (19) получена в условиях термодинамического равновесия, поэтому в данном случае постулируется отсутствие влияния гидродинамического движения на тепловое движение молекулы данной среды.

Теперь указанное слагаемое подвергаем следующему преобразованию:

$$\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial p}{\partial t}=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c\rho V^2}{2}\right). \qquad (20)$$

где дополнительно использовался интеграл (8).

После подстановки формулы (20) в (18) уравнение для закона сохранения энергии в гидродинамической среде принимает окончательный вид:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{c(1-\varepsilon)\rho V^2}{2}\right] d\omega + \iiint \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)\right]+ \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[v\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[w\left(p+\frac{c\rho V^2}{2}\right)\right]\right\} d\omega = 0. \tag{21}$$

Из сравнения уравнений (21) и (2) можно утверждать, что энергия E данной гидродинамической среды определяется по формуле:

$$E = c(1-\varepsilon)\rho\frac{V^2}{2}. \tag{22}$$

Кроме того, указанное сравнение позволяет установить дополнительные равенства:

$$Eg_x = u\left(p + c\rho\frac{V^2}{2}\right),\ Eg_y = v\left(p + c\rho\frac{V^2}{2}\right),\ Eg_z = w\left(p + c\rho\frac{V^2}{2}\right). \tag{23}$$

Каждое из равенств в (23) возведем в квадрат и почленно сложим, после чего получим:

$$E^2\left(g_x^2 + g_y^2 + g_z^2\right) = (u^2 + v^2 + w^2)\left(p + c\rho\frac{V^2}{2}\right)^2.$$

Это соотношение позволяет установить связь между скоростью g распространения энергии и гидродинамическими характеристиками в следующей форме:

$$Eg = V\left(p + c\rho\frac{V^2}{2}\right). \tag{24}$$

Для определения скорости g подставим в (24) формулу (22), после чего выражение для g придадим вид:

$$g = \frac{2p}{\rho c(1-\varepsilon)}\cdot\frac{1}{V} + \frac{V}{(1-\varepsilon)}. \tag{25}$$

Из условия $\dfrac{dg}{dV} = 0$ находим $V = \sqrt{\dfrac{2p}{c\rho}}$, при котором скорость g принимает минимальное равное значение:

$$g = \frac{2}{(1-\varepsilon)}\sqrt{\frac{2p}{c\rho}}. \tag{26}$$

Если в (26) положить $\varepsilon = 0$, а $c = 1$, то получим формулу Умова, которую он получил для несжимаемой жидкости в условиях движений, определяемых общеизвестными уравнениями Эйлера.

Формула (26) показывает, что скорость g распространения энергии пропорциональна величине $\sqrt{\dfrac{p}{\rho}}$, которая известна как скорость звука, установленная Ньютоном. Эта величина равна 212 м/с для воздуха при нормальных условиях атмосферы, когда $\rho = 1{,}293$ и $p = 9{,}807 \cdot 10^4$ кг/с^2.

В данной работе [4] интеграл (8) использовался для гидродинамического анализа истечения воды из сосуда через малое отверстие и, в частности, установлена формула, связывающая коэффициент c с коэффициентом скорости c_v следующим образом:

$$c = \frac{1}{2c_v^2}. \tag{27}$$

Коэффициент c_v является эмпирическим параметром, определяемым экспериментально. В литературе по гидравлике изложены обширные опытные данные по c_v, из которых следует, что он зависит от диаметра отверстия истечения и высоты гидродинамического столба жидкости. Из этих данных следует, что значения c_v лежит в пределах от 0,58 до 0,98.

Теперь, если для несжимаемой жидкости принять $c_v = 0{,}6$, то при ранее принятых условиях для ρ и p формулы (27) и (26) дают значения $g = 294$ м/с.

Понятие живой силы материального тела было введено Иоганом Бернулли в работе [1]. Согласно его вычислениям, живая сила материального тела пропорциональна произведению массы тела на квадрат его скорости. В данном случае, в соответствии с этим определением введем понятие живой силы частицы жидкости, определяемой по формуле:

$$T = c_2 m g^2, \tag{28}$$

где c_2 — эмпирический коэффициент пропорциональности.

Уравнение (5) позволяет установить зависимость массы частицы жидкости от скорости. Для этого перепишем его, например, для гидродинамической скорости в проекции на ось x. После чего будем иметь:

$$cm\frac{du}{dt} + cu\frac{dm}{dt} = F_1. \tag{29}$$

Здесь F_1 — проекция силы F на ось x. Силу F_1 выразим через изменение во времени живой силы частицы. Действительно, работа этой силы, отнесенная к единице времени, равна $F_1 \cdot u$, а изменение живой силы равно $\dfrac{dT}{dt}$.

Приравниваем эти величины и получаем:

$$F_1 \cdot u = \frac{dT}{dt} = c_2 \frac{dm}{dt} g^2.$$

Из этого равенства определяем F_1 и подставляем в (29), в результате получаем:

$$cm\frac{du}{dt} + cu\frac{dm}{dt} = \frac{c_2 g^2}{u}\frac{dm}{dt}. \qquad (30)$$

Далее введем дополнительные обозначения $\frac{u^2}{g^2} = \beta^2$ и $\frac{c}{c_2} = \gamma$, которые позволяют равенству (30) придать вид, удобный для интегрирования:

$$\frac{\gamma\beta d\beta}{(1-\gamma\beta^2)} = \frac{dm}{m}.$$

Произведя интегрирование слева и справа в этом соотношении, получаем:

$$\ln m = -\frac{1}{2}\ln(1-\gamma\beta^2) + \ln m_0. \qquad (31)$$

Теперь в (31) освобождаемся от логарифмов и переписываем (31) так:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\gamma\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{c}{c_2}\cdot\frac{u^2}{g^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{g_0^2}}}. \qquad (32)$$

Здесь введена новая величина скорости:

$$g_0 = \frac{2\sqrt{2c_2}}{c(1-\varepsilon)}\sqrt{\frac{P}{\rho}}, \qquad (33)$$

которая пропорциональна величине ньютоновской скорости звука. Для воздуха скорость звука равна 330 м/с. и если принять это значение для g_0, то получим дополнительное условие для определения эмпирических констант, входящих в (33).

Если массы, входящие в (32), отнести к единице объема, то получим следующую формулу, определяющую зависимость плотности ρ от скорости u:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{g_0^2}}}. \qquad (34)$$

Аналогичными рассуждениями можно получить формулы, определяющие зависимость плотности от составляющих *u* и *w* гидродинамической скорости *V*. А именно:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{g_0^2}}},\ \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{w^2}{g_0^2}}}. \tag{35}$$

Формулы (34) – (35) свидетельствуют, что при приближении гидродинамических скоростей *u, v, w* к скорости g_0, равной скорости звука, плотность ρ возрастает до бесконечности. Из опыта известно, что в таком случае в гидродинамическом потоке возникает ударная волна. Таким образом, при теоретических расчетах гидродинамических течений формулы (34) – (35) будут предвестниками появления ударных волн.

Литература

1. *Бернулли И.* Рассуждения о законах передачи движений // Бернулли И. Избранные сочинения по механике / перевод под ред. В.П. Егоршина. М.-Л.: Главн. ред. тех.-теорет. лит., 1937. С. 41–172.

2. *Бубнов В.А.* Об изучении плотности в гидродинамическом потоке // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2014. № 4 (16). С. 9–19.

3. *Бубнов В.А.* Об уравнениях гидродинамики с переменной плотностью // Седьмые Поляковские чтения: тезисы докладов международной конференции по механике (Санкт-Петербург, 2–6 февраля 2015 г.). М.: Изд-во И.В. Баланов. 2015. С. 86.

4. *Бубнов В.А.* Об уравнениях гидродинамики идеальной жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 2 (18). С. 9–15.

5. *Бубнов В.А.* Об уточнении уравнений Д. Бернулли в гидродинамике // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 1 (17). С. 9–24.

6. *Бубнов В.А.* Об уточнении уравнений гидродинамики идеальной жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 2 (18). С. 9–15.

7. *Бубнов В.А.* Об интеграле уравнений движения идеальной жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 2 (18). С. 16–25.

8. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. с латинского и комментарии А.Н. Крылова; под ред. и с предисловием Л.С. Полака. 3-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 704 с.

9. *Умов Н.А.* Уравнения движения энергии в телах // Умов Н.А. Избранные сочинения / под ред. А.С. Предводителева. М.-Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1950. С. 151–200.

Literatura

1. *Bernulli I.* Rassuzhdeniya o zakonax peredachi dvizhenij // Bernulli I. Izbranny'e sochineniya po mexanike / perevod pod red. V.P. Egorshina. M.-L.: Glavn. red. tex.-teoret. lit., 1937. S. 41–172.

2. *Bubnov V.A.* Ob izuchenii plotnosti v gidrodinamicheskom potoke // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2014. № 4 (16). S. 9–19.

3. *Bubnov V.A.* Ob uravneniyax gidrodinamiki s peremennoj plotnost'yu // Sed'my'e Polyakovskie chteniya: tezisy' dokladov mezhdunarodnoj konferencii po mexanike (Sankt-Peterburg, 2–6 fevralya 2015 g.). M.: Izd-vo I.V. Balanov. 2015. S. 86.

4. *Bubnov V.A.* Ob uravneniyax gidrodinamiki ideal'noj zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2015. № 2 (18). S. 9–15.

5. *Bubnov V.A.* Ob utochnenii uravnenij D. Bernulli v gidrodinamike // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2015. № 1 (17). S. 9–24.

6. *Bubnov V.A.* Ob utochnenii uravnenij gidrodinamiki ideal'noj zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2015. № 2 (18). S. 9–15.

7. *Bubnov V.A.* Ob integrale uravnenij dvizheniya ideal'noj zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2015. № 2 (18). S. 16–25.

8. *N'yuton I.* Matematicheskie nachala natural'noj filosofii / Per. s latinskogo i kommentarii A.N. Kry'lova; pod red. i s predisloviem L.S. Polaka. 3-e izd. M.: Izd-vo LKI, 2008. 704 s.

9. *Umov N.A.* Uravneniya dvizheniya e'nergii v telax // Umov N.A. Izbranny'e sochineniya / pod red. A.S. Predvoditeleva. M.-L.: Gos. izd. tex.-teor. lit., 1950. S. 151–200.

V.A. Bubnov

About the Speed of Energy Propagation in Hydrodynamic Flows

The paper gives a derivation of the formula for the velocity of propagation of energy in hydrodynamic flows of an ideal gas, the equations of motion of which are used in the formula proposed by the author of this article in his early works. In special cases this formula goes into N.A.Umov's formula, which he has received for an incompressible fluid. In the work the formulas for determining the dependence of the density on the components of the hydrodynamic velocity are also obtained. From these formulas it follows that the density value increases without limit as the indicated velocities approach the speed of sound.

Keywords: energy; speed; liquid; Newton's second law; density; pressure; mass of a particle.