В.А. Бубнов

Об уточнении уравнения Д. Бернулли в гидродинамике

В статье, благодаря конкретизации определения живой силы частицы жидкости, осуществляется уточнение общеизвестного в гидродинамике уравнения Бернулли. В его обновленном варианте перед показателем скоростного напора появляется дополнительный эмпирический множитель, позволяющий согласовывать теоретическое выражение с опытными фактами.

Ключевые слова: живая сила; частица жидкости; истечение жидкости через круглые отверстия; ламинарное и турбулентное течения.

В случае установившегося потенциального движения жидкости в гидродинамике используется соотношение:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = const, \tag{1}$$

которое имеет место при движении частицы жидкости вдоль линии тока. Напомним, что в (1) g — ускорение силы тяжести, z — вертикальная координата частицы жидкости, p — давление, ρ — плотность жидкости и, наконец, v — гидродинамическая скорость.

Известно, что соотношение (1) получено Л. Эйлером в 1755 г. как интеграл уравнений движения идеальной жидкости, написание которых также принадлежит Эйлеру. Однако до появления гидродинамических уравнений Эйлера Даниил Бернулли (1700–1782) в своем труде «Гидродинамика», опубликованном в 1738 г., впервые применил известное в механике уравнение живых сил к решению задач на движение несжимаемых жидкостей, подверженных действию силы тяжести (см., например, [1]). Им, в частности, рассматривалась задача об истечении жидкости из резервуара, в котором уровень жидкости над горизонтом остается постоянным в течение всего периода истечения. Результат решения этой задачи Д. Бернулли представил в форме соотношения, которое в современных размерностях входящих в него величин имеет вид:

$$gz + \frac{p}{\rho} + v^2 = const. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) схожи качественно, но различаются количественно, а именно коэффициентом при квадрате скорости.

На это обстоятельство никто из исследователей не обратил внимания, а соотношение (1), полученное Эйлером, многочисленные авторы стали называть уравнением или интегралом Бернулли.

Количественное отличие уравнения (2) от (1) есть следствие того, что при использовании уравнения живых сил живую силу частицы жидкости Бернулли определял как произведение массы частицы жидкости на квадрат скорости.

Метод Бернулли для вывода уравнения (2) усовершенствовал Н.Е. Жуковский, но чтобы получить соотношение (2), он выражение для живой силы отождествил с выражением для кинетической энергии частицы жидкости. Из изложенного становится очевидно, что написание уравнений (1)–(2), удовлетворяющих опытным фактам, связано с вычислением живой силы частицы жидкости.

Немецкий философ и математик Г.В. Лейбниц (1646–1716), изучая характер взаимодействия тел, выделил два типа сил, один из которых он назвал *живой силой*, а другой — *мертвой*. Лейбниц также считал, что живая сила равна произведению массы тела на квадрат его скорости.

Более подробно анализ живой силы как качественно, так и количественно был проделан Иоганном Бернулли (1667–1748) [2]. Определение живой и мертвой сил, данное Иоганном Бернулли, таково:

«Живая сила есть та сила, которая пребывает в равномерно движущемся теле. Наоборот, мертвая сила — та, которую получает тело без движения, если оно пробуждается и принуждается к движению или же которая побуждает двигаться быстрее или медленнее, если тело уже находится в движении».

Из данного определения следует, что мертвая сила состоит в простом усилии, и это усилие существует только тогда, когда внешнее препятствие мешает усилию привести тело в движение, на которое данное усилие распространяется. Такова, например, сила тяжести, которая мгновенно исчезает с исчезновением препятствующего ей тела.

Что же касается живой силы, то она не может ни рождаться, ни исчезать в одно мгновение подобно мертвой силе. Необходимо некоторое время для производства живой силы в теле, которое ее не имело. Необходимо также время, чтобы живую силу разрушить в теле, которое эту силу имеет. По всей видимости, живая сила эквивалентна той части причины, которая израсходовалась, производя ее, ибо всякая действующая причина должна быть равна своему полностью выполненному действию.

По мнению И. Бернулли, подобное происходит со сжатой пружиной, которая при растяжении тратит свою силу на производство видимой скорости тела, ранее ее не имевшей, и это продолжается до тех пор, пока вся сила пружины не будет истощена и не будет перенесена на тело, в котором она как бы сосредотачивается посредством полного накопления маленьких долей, производившихся непрерывно.

Именно эту силу, переданную телу, приведенному в движение посредством истощения давления пружины, Иоганн Бернулли назвал живой силой.

Для получения количественного соотношения, определяющего величину живой силы, И. Бернулли изучал кинематические характеристики одинаковых тел, приводимых в движение пружинами, состоящими из различного числа звеньев. Оказалось, что величина живой силы пропорциональна произведению массы на квадрат скорости, т. е.

$$F = cmv^2, \tag{3}$$

где c — коэффициент пропорциональности. Из рассуждений И. Бернулли следует также, что сила F по направлению совпадает с направлением скорости v. В случае пружины как источника живой силы процессы растяжения и сжатия пружины отличаются знаком величины c в формуле (3), т. е. коэффициент пропорциональности c в (3) может быть величиной как положительной, так и отрицательной.

Если в (3) положить $c = \frac{1}{2}$, то получим формулу для вычисления кинетической энергии материальной точки. Таким образом, живая сила материальной точки отождествляется с кинетической энергией. Возможно ли такое отождествление для частицы жидкости? Это вопрос, требующий ответа.

Для ответа на этот вопрос применим уравнение живых сил к частице жидкости, движущейся внутри элементарной струйки тока. При этом живую силу частицы жидкости будем определять по общей формуле (3). Далее, следуя работе [6], выделим в массе жидкости отдельную струйку (рис. 1), затем проведем через какой-либо бесконечно малый замкнутый контур все линии тока, обрежем струйку двумя ортогональными к ним сечениями A и B.

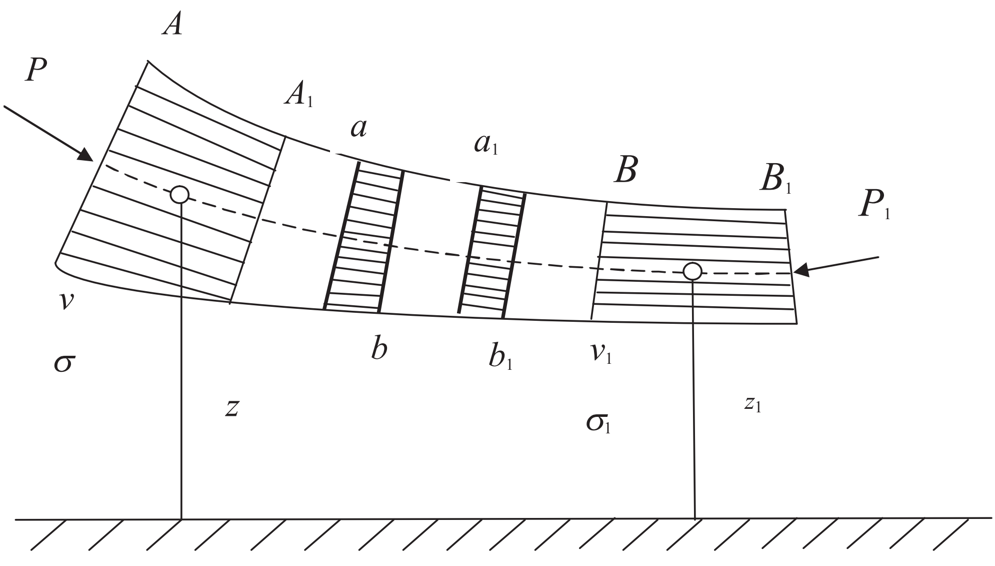

Рис. 1. Элементарная струйка тока

Обозначим через секундную массу m жидкости, проходящей через всякое сечение выделенной струйки. В течение времени dt масса m жидкости, заключенной в границах AB, перейдет в новое положение, определяемое отрезком A_1B_1. При этом количество жидкости, заключенное в каждом из заштрихованных концов струйки (рис. 1) между сечениями A и A_1, а также B и B_1, будет одинаковым и равно mdt.

Живая сила жидкости, заключенной между сечениями A_1 и B, остается неизменной в течение времени dt. Поэтому изменение живой силы для данной струйки будет определяться разностью живых сил частицы жидкости между сечениями B и B_1, а также частицы, заключенной между сечениями A и A_1. Считаем, что массы указанных частиц одинаковы и равны mdt.

Через σ и v обозначим площадь сечения A и скорость жидкости в этом сечении. Аналогично для сечения B будем обозначать через σ_1 площадь, а через v_1 скорость. Предполагаем, что скорость v в сечении A одинакова для всех точек жидкости, заключенной между сечениями A и A_1 данной струйки. Такое же предположение делается и для сечения B и B_1 применительно к скорости v_1.

В действительности это не так, потому что частица жидкости участвует в деформационном движении, в результате которого площадь σ не становится равной площади σ_1. В случае же неизменности массы m частиц $(A - A_1)$ и $(B - B_1)$ считаем равными их объемы, т. е. $\sigma vdt = \sigma_1 v_1 dt$. Именно поэтому живые силы указанных частиц будем вычислять по формуле (3), так что живая сила частицы $(A - A_1)$ будет равна $F = cmv^2$, а живая сила частицы $(B - B_1)$ будет равна $F_1 = cmv_1^2$.

В таком случае приращение живой силы рассматриваемой струйки за время dt оказывается равным

$$\Delta F = cmdt(v_1^2 - v^2). \tag{4}$$

Напишем теперь сумму работ всех сил гидродинамического давления, действующих на выделенную струйку за время dt.

Пусть p и p_1 — давления на единицу площади в сечениях A и B, а σ и σ_1 — площади этих сечений. Тогда силы гидродинамического давления на площадки A и B выразятся через $p\sigma$ и $p_1\sigma_1$. Так как давление p направлено по движению жидкости, а p_1 — против него, то работы этих сил соответственно будут:

$$+p\sigma vdt \text{ и } -p_1\sigma_1 v_1 dt,$$

где vdt и v_1dt — пути, пройденные сечениями A и B за время dt. Работа сил гидродинамического давления, действующих на боковые поверхности струйки, равна нулю, так как эти силы направлены нормально к перемещению жидкости. Следовательно, искомая работа равна $(p\sigma vdt - p_1\sigma_1 v_1 dt)$.

К работе сил давления добавим еще работу силы тяжести, которая применительно к данной струйке оказывается равной $mdtg(z - z_1)$, где $(z - z_1)$ суть высота, на которую опустилась частица жидкости за время dt из положения AA_1 в положение BB_1. Приравниваем изменение живой силы струйки, вычисленное по (4), работе сил давления и силы тяжести, после чего получаем:

$$cmdt(v_1^2 - v^2) = -p_1\sigma_1 v_1 dt + p\sigma v dt + mdtg(z - z_1).$$

Считаем равными объемы: $\sigma_1 v_1 = \sigma v = \frac{m}{\rho}$, что позволяет последнее соотношение переписывать так:

$$gz + \frac{p}{\rho} + cv^2 = gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + cv_1^2,$$

которое, в свою очередь, для рассматриваемой струйки означает справедливость следующего равенства:

$$gz + \frac{p}{\rho} + cv^2 = const. \qquad (5)$$

Если в (5) положить: $c = \frac{1}{2}$, то (5) переходит в соотношение, полученное Н.Е. Жуковским в [6], а если принять: $c = 1$, то получим уравнение (2), которое получено Даниилом Бернулли в [1].

В гидродинамике обычно вместо плотности ρ оперируют с удельным весом жидкости $\gamma = \rho g$. В таком случае уравнению (6) можно придать вид:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{c}{g}v^2 = const. \qquad (6)$$

Из практики использования уравнений (1) и (2) для решения задач гидравлики известно, что они только качественно описывают результаты опытных данных. Наличие же в уравнении (6) произвольного множителя сможет позволить в гидравлических расчетах согласовать теоретические расчеты с опытными данными.

Заметим, что уравнение (6) получено для несжимаемой жидкости. Если же жидкость сжимаема, то необходимо принять во внимание, кроме работы сил гидравлического давления, еще работу расширения упругой жидкости, которая получается за счет ее внутренней энергии. Работа расширения равна произведению давления на изменение объема. Для подсчета этой работы разобьем струйку на бесконечно малые части. Применяя к этим элементарным частям рассуждения, которые обычно делаются при рассмотрении изменения живой силы и количества движения, необходимо заключить, что за время dt элементарная масса $(a - b)$ (рис. 1), перейдя в положение $(a_1 - b_1)$, изменяет свой объем на величину, равную разности объемов жидкости $(a - a_1)$, протекавшей за время dt через сечение a, и $(b - b_1)$, протекшей через сечение b за то же время.

Так как объем жидкости, протекшей через какое-либо сечение струи, равен $\frac{m}{\rho}dt$, где ρ — плотность жидкости, то изменение элементарного объема струи между сечениями $(a - b)$ будет равно $d\left(\frac{mdt}{\rho}\right)$. Работа же расширения за время dt всей выделенной струйки AB будет равна:

$\int_A^B pd\left(\frac{mdt}{\rho}\right)$.

Теперь для сжимаемой жидкости получаем уравнение:

$$cm(v_1^2 - v^2)dt = -p_1\sigma_1 v_1 dt + p\sigma v dt + \int_A^B pd\left(\frac{mdt}{\rho}\right) + mdtg(z - z_1). \qquad (7)$$

В соотношении (7) можно сделать преобразование: σv и $\sigma_1 v_1$ — объемы жидкости, протекающей через сечения A и B в единицу времени; их можно выразить через секундную массу жидкости и плотность ее:

$$\sigma v = \frac{m}{\rho} \text{ и } \sigma_1 v_1 = \frac{m}{\rho_1}.$$

Здесь ρ и ρ_1 — плотности жидкости в сечениях A и B.

После этих преобразований получаем:

$$p_1\sigma_1 v_1 - p\sigma v = p_1\frac{m}{\rho_1} - p\frac{m}{\rho}. \qquad (8)$$

Заметим, что определенный интеграл, распространенный на всю выделенную часть AB струйки, равен

$$\int_A^B d\left(\frac{pm}{\rho}\right) = \left(\frac{pm}{\rho}\right)_B - \left(\frac{pm}{\rho}\right)_A = p_1\frac{m}{\rho_1} - p\frac{m}{\rho}. \qquad (9)$$

Сравниваем (9) и (8), после чего получаем:

$$-(p_1\sigma_1 v_1 - p\sigma v) = -\int_A^B d\left(\frac{pm}{\rho}\right).$$

Учитываем это соотношение и уравнение (7) переписываем так:

$$cmdt(v_1^2 - v^2) = -dt\int_A^B d\left(\frac{pm}{\rho}\right) + \int_A^B pd\left(\frac{m}{\rho}dt\right) + mdtg(z - z_1). \qquad (10)$$

Во втором интеграле в правой части (10) выносим dt из-под знака интеграла и второй интеграл объединяем с первым:

$$-dt\left[\int_A^B d\left(p\frac{m}{\rho}\right) - \int_A^B pd\left(\frac{m}{\rho}\right)\right] = \left[-\left(p\frac{m}{\rho}\right)_A^B + \left(p\frac{m}{\rho}\right)_A^B - \int_A^B \frac{m}{\rho}dp\right]dt = \left[-\int_A^B \frac{m}{\rho}dp\right]dt.$$

Отсюда уравнение (10) примет вид:

$$cmdt(v_1^2 - v^2) = -mdt\int_A^B \frac{dp}{\rho} + mdtg(z - z_1),$$

или, при сокращении на mdt,

$$c(v_1^2 - v^2) = -\int_A^B \frac{dp}{\rho} + g(z - z_1). \qquad (11)$$

Заменим в (11) массовую плотность ρ через $\frac{\gamma}{g}$, где γ — весовая плотность или удельный вес (вес 1 м^3 жидкости), а g — ускорение силы тяжести;

далее делим левую и правую части уравнения (11) на g, после чего получим:

$$c\left(\frac{v_1^2}{g}-\frac{v^2}{g}\right)=-\int_A^B\frac{dp}{\gamma}+(z-z_1). \qquad (12)$$

Это и есть самое общее выражение для уравнения Бернулли в случае установившегося движения.

Значение интеграла в (12) для несжимаемой жидкости, для которой $\gamma = const$, будет:

$$-\int\frac{dp}{\gamma}=-\frac{\Delta p}{\gamma}=-\frac{p_1-p}{\gamma}=\frac{p-p_1}{\gamma}. \qquad (13)$$

Для сжимаемой жидкости (газа) значение рассматриваемого интеграла зависит от того теплового процесса, который происходит в струе жидкости при ее течении. Если жидкость течет, сохраняя одну и ту же температуру, что соответствует изотермическому процессу, то величина γ пропорциональна давлению p. Тогда при интегрировании в (13) получаем логарифмическую функцию давления. Особый интерес в гидродинамике представляет адиабатический процесс, при котором жидкости не сообщают и не отбирают тепло. Этот процесс имеет место, когда жидкость или газ движутся очень быстро. В этом случае газ, приобретая большую скорость, выделяет из себя много теплоты и охлаждается.

Для адиабатического процесса γ изменяется по закону Пуассона:

$$\gamma = kp^{\varepsilon} \qquad (14)$$

где отношение теплоемкостей для воздуха оказывается равным 0,71. Это отношение вычисляется так:

$$\varepsilon=\frac{c_v}{c_p}. \qquad (15)$$

Здесь c_v — теплоемкость при постоянном объеме, а c_p — при постоянном давлении.

Политропные процессы также удовлетворяют уравнению (14) с той лишь разницей, что показатель политропности ε может принимать различные значения. Например, в изотермическом процессе $\varepsilon = 1$.

Пользуясь зависимостью (14), найдем значения интеграла в (13), а именно:

$$-\int_A^B\frac{dp}{\gamma}=-\int_p^{p_1}\frac{dp}{kp^{\varepsilon}}=-\frac{p_1^{(1-\varepsilon)}-p^{(1-\varepsilon)}}{k(1-\varepsilon)}. \qquad (16)$$

Если теперь в формулу (16) вместо p_1 поставить $p + \Delta p$, то получим:

$$-\int_A^B\frac{dp}{\gamma}=-\frac{(p+\Delta p)^{(1-\varepsilon)}-p^{(1-\varepsilon)}}{k(1-\varepsilon)}=-\frac{p^{(1-\varepsilon)}\left[\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{(1-\varepsilon)}-1\right]}{k(1-\varepsilon)}.$$

Разлагаем двучлен в квадратной скобке по биному Ньютона:

$$\left[\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{(1-\varepsilon)}-1\right]=1+(1-\varepsilon)\frac{\Delta p}{p}+\ldots-1=(1-\varepsilon)\frac{\Delta p}{p},$$

пренебрегая при этом высшими степенями $\frac{\Delta p}{p}$. Тогда

$$-\int_A^B\frac{dp}{\gamma}=-\frac{p^{(1-\varepsilon)}\cdot(1-\varepsilon)}{k(1-\varepsilon)}\cdot\frac{\Delta p}{p}=-\frac{\Delta p}{kp^{\varepsilon}}=-\frac{\Delta p}{\gamma}. \qquad (17)$$

Таким образом, при малых $\frac{\Delta p}{p}$ интеграл в (16) для упругой жидкости можно выразить так же, как и для несжимаемой:

$$-\int_A^B\frac{dp}{\gamma}=-\frac{\Delta p}{\gamma}=\frac{p-p_1}{\gamma}, \qquad (18)$$

независимо от величины политропности ε. Этот результат получен впервые в [6].

Соотношение (18) позволяет уравнение (12) переписать так:

$$c\left(\frac{v_1^2}{g}-\frac{v^2}{g}\right)=\frac{p-p_1}{\gamma}+(z-z_1), \qquad (19)$$

что эквивалентно следующему равенству:

$$c\frac{v^2}{g}+\frac{p}{\gamma}+z=const. \qquad (20)$$

Формула (20), написанная для сжимаемой жидкости совпадает с уравнением (6), полученным для несжимаемой жидкости. Уравнение (19) означает закон сохранения живой силы $c\frac{v^2}{2g}$ и потенциальной энергии $\frac{p}{\gamma}$ частицы жидкости в два различных момента времени, когда частица проходит через сечения *A* и *B*.

Из уравнения (19) находим, что разность давлений в двух точках одной и той же струйки при $(z-z_1)=0$:

$$\Delta p=c\frac{\gamma}{g}(v^2-v_1^2). \qquad (21)$$

Так как g = 9,81 м/с^2, а удельный вес воздуха при температуре 15 °С и давлении 760 мм равен γ = 1,225 кг/м^3, то $\frac{\gamma}{g}=\frac{1}{8}$ кг · с^2/м^4. Следовательно,

$$\Delta p=\frac{c}{8}(v^2-v_1^2). \qquad (22)$$

Формула (22) имеет практический характер. Давление в ней выражено в кг/м^2. Определяя избыток давления Δp в какой-либо точке, необходимо под v_1 подразумевать скорость воздуха в этой точке, а под v — скорость воздуха на той же линии тока, в той точке ее, где давление p известно. Как правило, величину коэффициента c в (22) принимают равной $\frac{1}{2}$, но это требует дополнительных обоснований.

Область применимости формулы (20) для сжимаемого газа можно определить следующим образом. Для нижних слоев атмосферы p = 10 300 кг/м^2. Когда избыточное давление Δp = 120 кг/м^2, то $\frac{\Delta p}{p} = \frac{120}{10\,300} = 0{,}0116.$ Следовательно, квадратом величины $\frac{\Delta p}{p}$ можно в данном случае пренебречь.

Для выявления физического смысла коэффициента c уравнение (20) перепишем так:

$$\frac{p}{\gamma} + 2c\frac{v^2}{2g} + z = const. \tag{23}$$

Если в (23) положить z = 0, а $2c$ обозначить как $(1 - \beta)$, то уравнению можно придать следующий вид:

$$p + (1-\beta)\rho\frac{v^2}{2} = const. \tag{24}$$

Из несколько других соображений уравнение (24) впервые получено в [3], а его эффективность для расчетов местных сопротивлений продемонстрирована в [4].

Рассмотрим задачу об истечении жидкости из малого отверстия, сущность которой такова. Если в сосуд с водой, в стенке или на дне которого проделано малое отверстие, добавить несколько капель анилиновой краски, то окажется, что в массе жидкости имеет место ламинарное движение жидкости с линиями тока, сходящимися со всех сторон к отверстию. У границы вытекающей струи линии тока касательны к краям отверстия, и при наличии у отверстия острых краев общее движение таково, как показано на рисунке 2 [5]. Отсюда следует, что, пройдя плоскость отверстия, сечение струи постепенно уменьшается и ее внешние края становятся параллельными только на некотором определенном расстоянии от отверстия. То сечение струи, где ее образующие становятся параллельными, называется сжатым сечением, и при малом круглом отверстии находится от него на расстоянии, приблизительно равном 0,498 его диаметра [5].

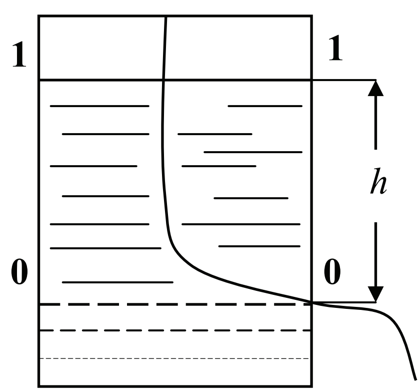

Рис. 2. Линия тока при истечении жидкости через малое отверстие

Эта задача обычно решается с помощью уравнения Д. Бернулли, написанного для двух сечений (1 – 1) и (0 – 0). В данном случае для решения указанной задачи воспользуемся уравнением (23), которое для двух отмеченных сечений переписывается так:

$$\frac{p_0}{\gamma}+2c\frac{v_0^2}{2g}+z_0=\frac{p_1}{\gamma}+2c\frac{v_1^2}{2g}+z_1. \qquad (25)$$

Здесь нижние индексы соответствуют номерам сечений, отмеченным на рисунке 2. Как правило, полагают: $p_0=p_1$, $v_1=0$, $z_0=0$ (см. [5]). После чего имеем:

$$2c\frac{v_0^2}{2g}=z_1=h. \qquad (26)$$

Уравнение (26) служит для определения скорости истечения v_0, которая определится формулой:

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{2c}}\sqrt{2gh}. \qquad (27)$$

Если $c=\frac{1}{2}$, то формула (27) переходит в общественную формулу:

$$v_0=\sqrt{2gh}, \qquad (28)$$

которая не соответствует опытным данным. Чтобы согласовать значения v_0, вычисленные по (28), вводят эмпирический коэффициент c_0, называемый коэффициентом скорости, и формуле (28) придают вид:

$$v_0=c_0\sqrt{2gh}. \qquad (29)$$

Из сравнения формул (27) и (29) можно выразить коэффициент c через c_0:

$$c=\frac{1}{2c_0^2}. \qquad (30)$$

Опытные значения коэффициента скорости c_v для различных режимов истечения приведены в [5], что в свою очередь позволяет по (30) вычислять c, а, следовательно, и живую силу гидродинамической частицы при рассмотренном течении.

В современной научной литературе термин «живая сила» либо не употребляется, либо количественно величина живой силы отождествляется с величиной кинетической энергии материальной точки. Чтобы различать эти два понятия, величину живой силы F определим так:

$$F=c_1\frac{mv^2}{2}=c_1T, \qquad (31)$$

где через T обозначена кинетическая энергия. В отличие от формулы (3) формула (31) позволяет трактовать живую силу как величину, пропорциональную кинетической энергии, но если суть величина положительная, то живая сила F может быть как положительной величиной, так и отрицательной.

Формула (31) позволяет выражению (6) придать вид:

$$gz+\frac{p}{\rho}+c_1\frac{v^2}{2}=const. \qquad (32)$$

Это выражение при $c_1 = 1$ переходит в общепринятое соотношение (1), называемое уравнением Бернулли. При переходе же от (6) к (32) следует принять, что $c_1 = 2c$.

Использование (32) в решении задачи об истечении жидкости через малое отверстие в стенке сосуда приводит к следующей формуле для скорости истечения v_0:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\sqrt{2gh}, \qquad (33)$$

что в свою очередь позволяет коэффициент c_1 вычислить через эмпирический коэффициент скорости c_v таким образом:

$$c_1 = \frac{1}{c_0^2}. \qquad (34)$$

Таблица 1

h*, *м	c_0	c_1
0,02	0,959	1,087
0,5	0,967	1,069
3,5	0,975	1,052
10,3	0,994	1,012

В таблице приведены заимствованные из [5] опытные данные немецкого физика Ю. Вейсбаха для c_0, полученные для отверстия диаметром в 1 см. Анализ опытных данных по c_0, проделанный в [5], показывает, что они сильно разнятся у различных исследователей.

Заметим, что при выводе соотношений (5)–(6) и (12) предполагалось постоянство скорости v в пределах ортогональных сечений A и B. Однако если площади указанных сечений конечны, то распределение скоростей по этим сечениям неоднородно и зависит от типа течения — ламинарного или турбулентного.

Например, распределение скоростей по поперечному сечению в круглой трубе при ламинарном режиме течения подчиняется параболическому закону Стокса:

$$v = 2w\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

где v — скорость на расстоянии r от оси трубы, w — средняя скорость, a — радиус трубы. Это распределение скорости требует уточнения в вычислении живой силы частицы жидкости конечных размеров. Для этого рассмотрим поток жидкости между двумя концентрическими, соосными трубе, цилиндрами радиусов r и $r + dr$. В единицу времени через поперечное сечение этого элементарного канала протекает объем жидкости, равный:

$$dQ = 2\pi r dr \cdot v.$$

Живая сила F согласно (31) объема будет равна:

$$dF = c_1 dQ \cdot \rho \frac{v^2}{2}.$$

Суммируем живые силы таких концентрических потоков по всему сечению трубы и получаем ту живую силу, которая проносится через сечение всем потоком в единицу времени. Имеем:

$$F = \int dF = c_1 \pi \rho \int v^3 r dr. \qquad (35)$$

Внося сюда значение v по формуле Стокса и производя интегрирование, получаем:

$$F = 8 c_1 \pi \rho w^3 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3 r dr = c_1 \pi \rho w^3 a^2.$$

Так как через сечение проходит в единицу времени количество жидкости, равное:

$$G = Q \cdot \gamma = Q \cdot g\rho = \pi a^2 w \cdot g\rho,$$

то, следовательно, одна единица массы несет с собой количество живой силы, равное:

$$h_w = \frac{F}{G} = 2c_1 \frac{w^2}{2g}. \qquad (36)$$

Величину h_w в этой формуле называют высотой скоростного напора, вычисленной по средней скорости w.

Таким образом, для ламинарного потока действительная удельная живая сила вследствие неравномерности распределения скоростей по сечению, в два раза больше той, которая получается в предположении, что все частицы приняли среднюю скорость потока, т. е. $w = v$ в рамках соотношения (32).

Для турбулентного потока в трубе действительная скорость на большей части сечения весьма близка к средней скорости w потока, и только в пограничном слое скорости частиц быстро уменьшаются до нуля на самой стенке. Существует много формул, которыми стремятся представить поле скоростей в турбулентном потоке. Теоретически лучше всего обоснованной является формула Кармана-Прандтля, представляющая так называемый закон одной седьмой степени. Этот закон имеет следующий вид:

$$v = \frac{8}{7} w \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{7}}. \qquad (37)$$

Внося это выражение в формулу (35) для F, получаем:

$$F = c_1 \pi \rho \left(\frac{8}{7}\right)^3 w^3 \cdot \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{7}} r dr =$$

$$= -c_1\pi\rho\left(\frac{8}{7}\right)^3 w^3\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^a\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{7}} d\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] = \frac{128}{7^2\cdot 5}c_1\pi\rho w^3 a^2.$$

Следовательно, удельная живая сила равна:

$$h_w = \frac{F}{G} = \frac{128}{7^2\cdot 5}\cdot\frac{c_1\pi\rho w^3 a^2}{\pi\rho w a^2 g} = \frac{256}{245}\cdot c_1\frac{w^2}{2g} = 1,045\ c_1\frac{w^2}{2g}. \qquad (38)$$

Полученные соотношения (36) и (38) позволяют уравнение (32) переписать так:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha c_1\frac{w^2}{2g} = const, \qquad (39)$$

где w — средняя скорость по живому сечению гидродинамического потока. Теперь, учитывая (39), уравнение (25), используемое для решения задачи об истечении жидкости через малое отверстие, переписываем таким образом:

$$\frac{P_0}{\gamma} + \alpha c_1\frac{w_0^2}{2g} + z_0 = \frac{P_1}{\gamma} + \alpha c_1\frac{w_1^2}{2g} + z_1, \qquad (40)$$

из которого, проводя вычисления аналогичные тем, которые способствовали получению формулы (27), получаем следующую формулу для средней скорости:

$$w = \frac{1}{\sqrt{\alpha c_1}}\sqrt{2gh}. \qquad (41)$$

Здесь, $\alpha = 2$ для ламинарного потока и $\alpha = 1,045$ для турбулентного потока.

Если принять коэффициент сжатия вытекающей из отверстия струи равным единице, а площадь отверстия обозначить через s, то расход Q в единицу времени будет определяться так:

$$Q = w\cdot s = \frac{s}{\sqrt{\alpha c_1}}\sqrt{2gh} = c_q\cdot s\sqrt{2gh}. \qquad (42)$$

Величина c_q в гидродинамике называется коэффициентом расхода, для которого имеются опытные данные. В качестве примера таких данных в таблице 2 приводим заимствованные из [5] значения коэффициента расхода c_q для круглого отверстия с острыми краями.

Таблица 2

Напор *h, м*	**Диаметр отверстия, *см***				
	1,91	**2,54**	**3,81**	**5,08**	**6,35**
0,061	0,684	0,645	0,617	0,611	0,609
0,122	0,675	0,640	0,615	0,609	0,607
0,244	0,666	0,636	0,613	0,607	0,606
0,366	0,659	0,634	0,612	0,607	0,606
0,448	0,654	0,632	0,612	0,607	0,606
0,610	0,651	0,630	0,611	0,607	0,606

Напор *h, м*	**Диаметр отверстия, *см***				
	1,91	**2,54**	**3,81**	**5,08**	**6,35**
1,22	0,641	0,627	0,611	0,607	0,606
2,44	0,635	0,626	0,611	0,607	0,606
3,05	0,635	0,625	0,611	0,607	0,606
6,10	0,635	0,625	0,611	0,607	0,606
12,2	0,635	0,625	0,611	0,607	0,606
18,3	0,634	0,624	0,611	0,607	0,606
24,4	0,634	0,624	0,611	0,607	0,606
30,5	0,634	0,624	0,611	0,607	0,606

Из (42) можно получить формулу для c_1:

$$c_1 = \frac{1}{\alpha c_q^2}, \qquad (43)$$

которая позволяет для этих опытных данных определить пределы измерения c_1 в случае ламинарных движений в вытекающей струе. Они таковы: $1{,}069 < c_1 < 1{,}362$, что означает увеличение значений c_1 с увеличением диаметра отверстия, из которого происходит истечение жидкости.

Применительно к движению жидкости в круглой трубе в уравнении (39) принимаем $z = 0$ и переписываем его так:

$$\frac{P_2}{\gamma} + \alpha c_1 \frac{w^2}{2g} = \frac{P_1}{\gamma}, \qquad (44)$$

где P_1 — давление в первоначальном сечении трубы, а P_2 — во втором. Из (44) можно определить величину h, называемую потерей напора в трубе, следующим образом:

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = h = \alpha c_1 \frac{w^2}{2g}. \qquad (45)$$

В гидравлике для потери напора h известна формула Дарси – Вейсбаха:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \cdot \leq \frac{w^2}{2g}, \qquad (46)$$

где λ — коэффициент гидравлического сопротивления, l — длина трубы, а d — ее диаметр. Сравнивая (45) и (46), получаем:

$$c_1 = \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{l}{d}. \qquad (47)$$

Известно, что в случае ламинарного движения жидкости по трубе $\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$, а для турбулентного течения можно рекомендовать формулу Блазиуса:

$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$. В этих формулах используется так называемое число Рейнольдса: $\mathrm{Re} = \frac{w \cdot d}{\nu}$, где через ν обозначена кинематическая вязкость жидкости.

Литература

1. *Бернулли Д.* О течении жидкости // Голин Г.М., Филонович С.Р. Классики физической науки с древнейших времен до начала XX в.: справочное пособие. М.: Высшая школа, 1989. С. 170–179.

2. *Бернулли И.* Рассуждения о законах передачи движений // Бернулли И. Избранные сочинения по механике / Перевод и под ред. В.П. Егоршина. М.-Л.: Глав. редакция технико-теорет. лит-ры, 1937. С. 41–172.

3. *Бубнов В.А.* Об уравнении Бернулли для турбулентных течений и гидродинамическом сопротивлении гладких труб // Весцi АН БССР. Сер. фiз. энерг. навук. 1990. № 1. С. 121–125.

4. *Бубнов В.А.* Расчет местных сопротивлений в проточной части гидропривода // Вестник машиностроения. 1989. № 11. С. 17–20.

5. *Гибсон А.* Гидравлика и ее приложения / Перевод и под ред. М.В. Потапова. М.-Л.: Государственное энергетическое изд-во, 1934. 605 с.

6. *Жуковский Н.Е.* Полн. собр. соч. Лекции / Под ред. В.П. Ветчинкина. Вып. 1: Теоретические основы воздухоплавания. Ч. 1. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1938. 539 с.

Literatura

1. *Bernulli D.* O techenii zhidkosti // Golin G.M., Filonovich S.R. Klassiki fizicheskoj nauki s drevnejshix vremen do nachala XX v.: spravochnoe posobie. M.: Vy'sshaya shkola, 1989. S. 170–179.

2. *Bernulli I.* Rassuzhdeniya o zakonax peredachi dvizhenij // Bernulli I. Izbranny'e sochineniya po mexanike / Perevod i pod red. V.P. Egorshina. M.-L.: Glav. redakciya texniko-teoret. lit-ry', 1937. S. 41–172.

3. *Bubnov V.A.* Ob uravnenii Bernulli dlya turbulentny'x techenij i gidrodinamicheskom soprotivlenii gladkix trub // Весцi АН БССР. Сер. фiз. энерг. навук. 1990. № 1. С. 121–125.

4. *Bubnov V.A.* Raschet mestny'x soprotivlenij v protochnoj chasti gidroprivoda // Vestnik mashinostroeniya. 1989. № 11. S. 17–20.

5. *Gibson A.* Gidravlika i eyo prilozheniya / Perevod i pod red. M.V. Potapova. M.-L.: Gosudarstvennoe e'nergeticheskoe izd-vo, 1934. 605 s.

6. *Zhukovskij N.E.* Poln. sobr. soch. Lekcii / Pod red. V.P. Vetchinkina. Vy'p. 1: Teoreticheskie osnovy' vozduxoplavaniya. Ch. 1. M.–L.: ONTI NKTP SSSR, 1938. 539 s.

V.A. Bubnov

About Clarification of Daniel Bernoulli Equation in Hydrodynamics

In this article, because of concretization of the definition of manpower of fluid particle, the author carries out more precise definition of a well-known in hydrodynamics Bernoulli equation. In the updated version of the equation before the index of velocity head an additional empirical factor that allows to coordinate the theoretical expression with experimental facts appears.

Keywords: manpower; fluid particle; efflux of fluid through a round holes; laminar and turbulent flows.