В.М. Овсянников

Локальное несохранение плотности при периодических колебательных движениях

В статье исследован механизм образования волн давления в потоке газа. Полученное волновое уравнение применено для расчета регмаглиптов на метеоритах.

Ключевые слова: интегральный закон сохранения; локальное несохранение; дифференциальное уравнение неразрывности; члены второго порядка малости; акустические волны.

В 1997–1999 годах В.А. Бубнов [1–2] обратил внимание на то, что в работе Н.Е. Жуковского по построению эллипсоида деформаций указывается на существование в уравнении неразрывности дополнительных членов высокого порядка по времени. Вскоре такие же члены были обнаружены в работе Л. Эйлера [10–11].

Дифференциальный закон сохранения количества вещества для движущейся жидкости решил вывести Л. Эйлер [10–11] для простого течения с линейным распределением компонент скорости u, v по координатам x, y, при котором производные $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial x$, $\partial v / \partial y$ остаются постоянными в достаточно обширной области течения. Эйлер деформировал прямоугольный треугольник и пользовался для вычислений его площади формулой площади косоугольного треугольника. Мы проиллюстрируем его путь деформацией единичного квадрата. Ради простоты иллюстрации ограничимся случаем плоского двухмерного стационарного течения несжимаемой жидкости, в котором происходят деформации сжатия и растяжения контрольной фигуры, положив скорости деформаций сдвига равными нулю:

$$\partial u / \partial y = 0, \partial v / \partial x = 0.$$

При линейном лагранжевом законе движения жидкой частицы по времени t для изменения площади S единичного квадрата применяется параболический закон изменения по времени:

$$S(t) = (1 + t\,\partial u / \partial x)(1 + t\,\partial v / \partial y) =$$
$$= 1 + t(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) + t^2 (\partial u / \partial x)(\partial v / \partial y).$$

Прямую линию можно сделать постоянной функцией, но никаким выбором скоростей деформаций $\partial u / \partial x$ и $\partial v / \partial y$ параболу нельзя свести в точности к постоянному значению, равному начальной единичной площади квадрата:

$$1 + t(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) + t^2 (\partial u / \partial x)(\partial v / \partial y) \neq 1 \text{ при } t > 0.$$

Идею сохранения количества вещества в течении жидкости при линейном лагранжевом законе движения жидкой частицы по времени можно выразить математически только приближенными математическими операциями.

Эйлер и последующие исследователи в области гидродинамики пошли по пути приближенного выполнения закона сохранения, занулив предельным переходом $t \to 0$ квадратичный член. Однако мы имеем доказательство Эйлером локального несохранения количества вещества в контрольной фигуре за счет углового эффекта одновременной — парной деформации сжатия и растяжения, учитываемых произведением $(\partial u / \partial x)(\partial v / \partial y)$.

Почему этого эффекта одновременной — парной деформации в двух взаимноперпендикулярных направлениях нет в уравнении неразрывности, выводящемся с использованием формулы Гаусса – Остроградского? В выводе уравнения неразрывности с использованием формулы Гаусса – Остроградского используют формулу с направляющими косинусами (5) из раздела 651 третьего тома учебника Г.М. Фихтенгольца [9], из которой двойные деформации уже выкинуты с помощью привлечения «гипотезы прилипания» с занулением тангенциальной скорости v_τ в окрестности границы контрольной фигуры. В монографии [6] показано, что если воспользоваться точной формулой Гаусса – Остроградского (см. Курс математического анализа Э. Гурса [3] или формулой (4) раздела 651 третьего тома учебника Г.М. Фихтенгольца [9]) без направляющих косинусов, то уравнение неразрывности получается с учетом члена двойных деформаций.

Сам Эйлер, проведя вычисления с учетом деформаций сдвига:

$$\partial u / \partial y \neq 0 \text{ и } \partial v / \partial x \neq 0,$$

получил для модели плоского двухмерного течения несжимаемой жидкости такое выражение локального закона несохранения:

$$\mathrm{div}\, V + t\, \partial (u, v) / \partial (x, y) = 0,$$

где t — лагранжево время, а $\partial (u, v) / \partial (x, y)$ — якобиан поля скорости.

В этот период Эйлер жил и работал в Пруссии и доложил о своем результате в 1752 году Берлинской Академии наук.

Этот угловой геометрический эффект двойных и тройных одновременных деформаций реализуется как при постоянной, одинаковой по всей контрольной фигуре плотности ρ, так и при переменной ρ по координатам. Для сжимаемого газа аналогичное дифференциальное уравнение неразрывности было выведено в 2006 году. Оно имеет вид:

$$\partial \rho / \partial t + \mathrm{div}\, (\rho V) + t\, \partial (u, v) / \partial (x, y) = 0.$$

Для использования локального закона несохранения плотности надо показать его совместимость с интегральным законом сохранения, который поддерживался Ломоносовым. Вывод волнового уравнения, проведенный методом [5] акустической аналогии М. Лайтхилла с использованием уравнения неразрывности с дополнительным членом, содержащим якобиан, дал неоднородное волновое уравнение:

$$\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2 - c_0^{-2}\, \partial^2 p / \partial t^2 = \rho_0\, \partial (u, v) / \partial (x, y),$$

генерирующее при течении газа синусоидальные волны. Тогда становится понятным смысл локального несохранения, отраженного дифференциальным уравнением неразрывности. Синусоидальное изменение давления или плотности движущегося газа на расстояниях меньше половины длины волны звука $\lambda / 2$ и за интервалы времени t меньше половины периода колебаний $T / 2$ приводит к непостоянству количества вещества в контрольной фигуре. Некоторая часть газа в течение первого полупериода за счет двойных деформаций вытекает из контрольной фигуры, а в течение второго полупериода возвращается назад в контрольную фигуру. Если рассматривать количество газа в объеме, содержащем большое количество акустических волн λ или за промежуток времени t, содержащий большое количество периодов колебаний T, то интегральное сохранение для синусоидальных колебаний выполняется. Мы сосредоточили внимание на очевидных вещах потому, что в акустике для генерации звука принято использовать уравнение неразрывности, не учитывающее двойных деформаций:

$$\partial\rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho V) = 0,$$

и добавлять в него турбулентные пульсации q:

$$\partial\rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho V) = -\rho q,$$

как это делают авторы монографии [5].

С учетом закона локального несохранения отпадает необходимость в привлечении эмпирического турбулентного члена.

Таким образом, линейные по времени дополнительные члены уравнения неразрывности Эйлера, приводя к локальному несохранению и генерации волн давления, накладывающихся на стационарное ламинарное течение, не нарушают интегрального закона сохранения М.В. Ломоносова.

Для иллюстрации распределения в поле течения центров волнообразования вычислим величину якобиана для плоского потенциального стационарного поперечного обтекания цилиндра с комплексным потенциалом:

$$w = U(z + a^2 / z).$$

Здесь a — диаметр цилиндра, U — скорость его обтекания на бесконечности. Потенциал скорости φ в декартовых координатах дается формулой:

$$\varphi = Ux\,[1 + a^2 / (x^2 + y^2)],$$

а функция тока ψ:

$$\psi = Uy\,[1 - a^2 / (x^2 + y^2)].$$

Линии тока для поперечного обтекания цилиндра единичного диаметра $a = 1$ потоком с единичной скоростью $U = 1$ можно вычислить по формуле:

$$x = [y / (y - \psi) - y^2]^{0,5},$$

вытекающей из предыдущей. Численный расчет дал гладкое распределение линий тока при потенциальном обтекании цилиндра.

Вычисления распределения якобиана J по поверхности обтекаемого цилиндра, как показали вычисления, подробно изложенные в монографии [6], дали распределение, подчиняющееся формуле:

$$J = -U^2 a^4\, 4\cos(6\alpha) / (r^6),$$

где r — радиус цилиндрической системы координат, α — угол.

Решение неоднородного волнового уравнения методом запаздывающих потенциалов приводит к выводу, что интенсивность I, генерируемого течением звука, пропорциональна квадрату якобиана. Таким образом,

$$I = J^2 \sim \cos^2(6\alpha) \sim [1 + \cos(12\alpha)] / 2.$$

Распределение функции $\cos^2(6\alpha)$ по углу α обтекаемого цилиндра имеет 12 максимумов. Каждый экстремум якобиана, входящего в правую часть волнового уравнения, является центром возбуждения акустических колебаний. Это неожиданный результат для гладкой картины линий тока потенциального обтекания.

В астрономии есть загадка образования регмаглиптов на поверхности метеорита, совершившего частичное разрушение поверхности при полете в плотных слоях атмосферы Земли. Вместо гладкой поверхности образуется поверхность, имеющая лунки с размером около 0,1 доли диаметра метеорита. Метеорит в атмосфере Земли разрушается под действием лучистого и конвективного тепловых потоков [4; 7]. Если предположить повышенную величину теплообмена и массообмена в местах возбуждения акустических колебаний (см., например, монографию «Вибрационное горение» [8]), то размеры регмаглиптов получаются равными 0,13 доли диаметра цилиндра.

Из приведенного материала можно сделать следующие выводы.

В соответствии с линейным законом деформации жидкой частицы, исследованным Л. Эйлером, в сжимаемой среде возможно образование волн давления на фоне стационарного ламинарного течения.

Реальное возникновение таких волн подтверждается образованием регмаглиптов — регулярной системы лунок на поверхности метеорита, частично разрушающегося в процессе полета в атмосфере Земли.

Литература

1. *Бубнов В.А.* Физические принципы гидродинамических движений // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. Вып. 4. 1997. С. 206–269.

2. *Бубнов В.А.* Кинематика жидкой частицы // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. Вып. 7. 1999. С. 11–29.

3. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 1. Ч. 1. М.-Л.: ГИТТИ, 1933. 368 с.

4. *Кондратьев А.С., Панкратов Б.М., Полежаев Ю.В.* и др. Взаимодействие материалов с газовыми потоками. М.: Машиностроение, 1976. 224 с.

5. *Миниович И.Я.* и др. Гидродинамические источники звука. Л.: Судостроение, 1972. 478 с.

6. *Овсянников В.М.* Конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. М.: Спутник плюс, 2014, 250 с.

7. *Овсянников В.М.* Учет селективности поглощения излучения в гиперзвуковом потоке газа. М.: Наука, 1983. 153 с.

8. *Раушенбах Б.В.* Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961. 500 с.

9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматгиз, 1960. 656 с.

10. *Euleri L.* Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius / Ed. C.A. Truesdell. Lausannae, 1954.

11. *Euler L.* Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. V. 6 (1756−1757). P. 271−311 // Opera omnia, ser. II. V. 13. P. 1−369.

Literatura

1. *Bubnov V.A.* Fizicheskie principy' gidrodinamicheskix dvizhenij // Problemy' aksiomatiki v gidrogazodinamike. Vy'p. 4. 1997. S. 206–269.

2. *Bubnov V.A.* Kinematika zhidkoj chasticzy' // Problemy' aksiomatiki v gidrogazodinamike. Vy'p. 7. 1999. S. 11–29.

3. *Gursa E'.* Kurs matematicheskogo analiza. T. 1. Ch. 1. M.-L.: GITTI, 1933. 368 s.

4. *Kondrat'ev A.S., Pankratov B.M., Polezhaev Yu.V.* i dr. Vzaimodejstvie materialov s gazovy'mi potokami. M.: Mashinostroenie, 1976. 224 s.

5. *Miniovich I.Ya.* i dr. Gidrodinamicheskie istochniki zvuka. L.: Sudostroenie, 1972. 478 s.

6. *Ovsyannikov V.M.* Konechno-raznostnoe uravnenie nerazry'vnosti Leonarda E'jlera. M.: Sputnik plyus, 2014, 250 s.

7. *Ovsyannikov V.M.* Uchet selektivnosti pogloshheniya izlucheniya v giperzvukovom potoke gaza. M.: Nauka, 1983. 153 s.

8. *Raushenbax B.V.* Vibracionnoe gorenie. M.: Fizmatgiz, 1961. 500 s.

9. *Fixtengol'cz G.M.* Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3. M.: Fizmatgiz, 1960. 656 s.

10. *Euleri L.* Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius / Ed. C.A. Truesdell. Lausannae, 1954.

11. *Euler L.* Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. V. 6 (1756−1757). P. 271−311 // Opera omnia, ser. II. V. 13. P. 1−369.

V.M. Ovsyannikov

Local Non-Conservation at Periodic Oscillatory Movements

In 1752 L.Euler deduced an equation of continuity in view of terms of the high order of a smallness which depends on time. Terms of the second order of a smallness take into account joint deformations of a control figure along mutual - perpendicular axes. Euler found the reason of appearance of sine wave oscillations at laminar flow of a liquid and local non-conservation wherein of quantity of substance in control volume. Terms of the high order of a smallness break a law of conservation an amount of substance in an acoustic field on distances which are less than half of length of a wave, in the time, which less than a half-cycle of the oscillations. But the sine wave law of oscillations ensures realization of an Lomonosov's integrated law of conservation of an amount of substance for the volume containing of many lengths of waves, in time, which is more than a period of acoustic oscillations.

Keywords: an integrated law of conservation; local non-conservation; a differential equation of continuity; terms of the second order of a smallness; acoustic waves.