В.В. Богун

Реализация принципа фундирования при исследовании функций вещественного переменного

В статье представлено описание принципа фундирования и его применение к исследованию функций вещественного переменного на примере последовательного рассмотрения необходимых математических объектов (пределы, производные, интегралы функций и дифференциальные уравнения).

Ключевые слова: фундирование; функции вещественного переменного.

Принцип фундирования математических и информационных знаний изначально был разработан профессором Е.И. Смирновым применительно к педагогическим наукам и был сориентирован на становление личностного опыта студента на основе поэтапного развертывания теоретических, процедурных и компетентностных структур [1; 3].

Однако данный принцип можно адаптировать непосредственно к конкретным дисциплинам естественно-научного цикла в целом и к математике в частности. Например, при исследовании функций вещественного переменного данный принцип заключается в последовательном рассмотрении математических объектов, требующих реализации иерархических логических математических структур с последовательным переходом от рассмотрения элементарных арифметических и логических операций к более сложным алгоритмическим и структурированным задачам, требующим представления математических объектов с точки зрения статических и динамических составляющих с применением объектно-ориентированного подхода [2].

Применение принципа фундирования к исследованию функций вещественного переменного [4–5] позволяет объединить следующие основные объекты в единую последовательную цепочку, которая дает возможность сформировать спираль фундирования.

Понятие предела функции является начальным элементом спирали фундирования, базируясь на понятии предела числовой последовательности.

Понятие производной функции базируется на понятии предела функции, поскольку производная функции определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю, то есть в основе понятия производной как математического объекта лежит понятие объекта предела функции, которое выражается в виде следующего равенства:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Необходимо отметить, что при исследовании функций с целью построения их графиков используются как понятия пределов функций на бесконечности (нахождение уравнений горизонтальных асимптот) и в точках (нахождение уравнений вертикальных и наклонных асимптот), так и производных функций в точках (нахождение первой производной с целью определения критических точек и интервалов возрастания и убывания функции, а также второй производной с целью определения точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости функции).

Понятие интеграла функции или объекта, называемого первообразной функцией, базируется на понятии объекта производной функции, поскольку нахождение неопределенного интеграла или первообразной функции определяется как операция, обратная нахождению производной функции, что отражено в виде следующей записи, тогда как производная функция, согласно утверждению выше, основывается на понятии предела функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Понятие дифференциального уравнения базируется на понятии производной и интеграла функции, так как в записи дифференциального уравнения присутствуют производные определенных порядков, а при решении дифференциального уравнения в общем или частном виде получаем соответственно несколько или одну интегральную кривую, которая определяется при нахождении соответствующего неопределенного интеграла с константой или точным числовым значением в итоге.

Например, если рассмотреть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида:

$$y' = f(x, y) = u(x) \cdot v(x),$$

то нахождение его общего решения сводится в итоге к интегрированию функции:

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = u(x) \cdot v(y), \quad \frac{dy}{v(y)} = u(x)dx, \quad \int \frac{dy}{v(y)} = \int u(x)dx,$$

то есть

$$F(u) = F(x) + C.$$

Итак, применение принципа фундирования к исследованию функций вещественного переменного позволяет объединить следующие основные объекты в единую последовательную цепочку, которая позволяет сформировать представленную на рисунке 1 спираль фундирования.

Спираль фундирования объектов функций вещественного переменного подразумевает определенное наследование статических (признаки или атрибуты) и динамических свойств (действий, операций) рассматриваемых объектов.

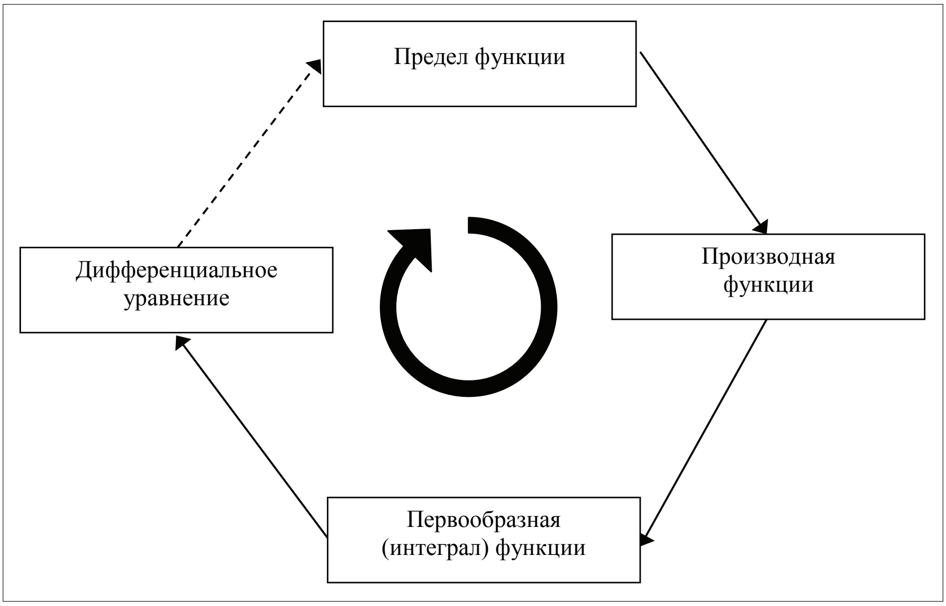

Рис. 1. Спираль фундирования понятий функций вещественного переменного

Представим краткий сравнительный анализ элементарных арифметических операций, свойственных понятиям или объектам, рассматриваемых в рамках указанной спирали фундирования при исследовании функций вещественного переменного.

В частности, для пределов производных и первообразных функций вещественного переменного операции сложения, вычитания и умножения на число логически идентичное для данных объектов, тогда как операции умножения и деления в чистом виде выполняются только для пределов функций, для производных функций возникает абсолютно новая логическая формулировка данных операций, тогда как для интегралов она вообще отсутствует в чистом виде и заменяется методами замены переменной и интегрирования по частям, что отражено в таблице. Необходимо отметить, что для дифференциальных уравнений как таковых наличие данных свойств не предполагается, однако при решении дифференциальных уравнений возникают первообразные и производные функции как необходимые компоненты.

Таблица 1

Сравнительный анализ математических объектов

Операция		**Математический объект**
Предел функции вещественного переменного		
1	Сложение	$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$
2	Вычитание	$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)$

Операция		Математический объект
3	Умножение на число	$\lim\limits_{x\to a}\left(C\cdot f(x)\right)=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$
4	Умножение	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$
5	Деление	$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$
Производная функции вещественного переменного		
1	Сложение	$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$
2	Вычитание	$\left(f(x)-g(x)\right)'=f'(x)-g'(x)$
3	Умножение на число	$\left(C\cdot f(x)\right)'=C\cdot f'(x)$
4	Умножение	$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
5	Деление	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Интеграл функции вещественного переменного		
1	Сложение	$\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
2	Вычитание	$\int(f(x)-g(x))dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$
3	Умножение на число	$\int(C\cdot f(x))dx=C\cdot\int f(x)dx$
4	Умножение	$\int(f(x)\cdot g(x))dx$ — отсутствует в чистом виде
5	Деление	$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ — отсутствует в чистом виде

Таким образом, применение принципа фундирования при рассмотрении основных понятий, связанных с исследованием функции вещественного переменного (пределы, производные и первообразные функции, а также дифференциальные уравнения), позволяет выявить определенную логическую зависимость между данными понятиями и провести их сравнительный анализ.

Литература

1. *Богун В.В.* Математическая логика программных особенностей реализации системы мониторинга дистанционных учебных проектов // Ярославский

педагогический вестник. Серия «Физико-математические и естественные науки». 2010. № 2. С. 22–33.

2. *Богун В.В., Осташков В.Н., Смирнов Е.И.* Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: учеб. пособие. Ярославль: Канцлер, 2010. 498 с.

3. *Богун В.В., Смирнов Е.И.* Лабораторный практикум по математике с графическим калькулятором: учеб. пособие. Ярославль: Канцлер, 2010. 272 с.

4. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. М.: Большая Медведица, 2001. 864 с.

5. *Ермаков В.И.* Общий курс высшей математики для экономистов. М.: Инфра-М, 2008. 656 с.

Literatura

1. *Bogun V.V.* Matematicheskaya logika programmny'x osobennostej realizacii sistemy' monitoringa distancionny'x uchebny'x proektov // Yaroslavskij pedagogicheskij vestnik. Seriya «Fiziko-matematicheskie i estestvenny'e nauki». 2010. № 2. S. 22–33.

2. *Bogun V.V., Ostashkov V.N., Smirnov E.I.* Naglyadnoe modelirovanie v obuchenii matematike: teoriya i praktika: ucheb. posobie. Yaroslavl': Kanczler, 2010. 498 s.

3. *Bogun V.V., Smirnov E.I.* Laboratorny'j praktikum po matematike s graficheskim kal'kulyatorom: ucheb. posobie. Yaroslavl': Kanczler, 2010. 272 s.

4. *Vy'godskij M.Ya.* Spravochnik po vy'sshej matematike. M.: Bol'shaya Medvedicza, 2001. 864 s.

5. *Ermakov V.I.* Obshhij kurs vy'sshej matematiki dlya e'konomistov. M.: Infra-M, 2008. 656 s.

V.V. Bogun

Implementation of the Principle of Foundation in Investigation Functions of Real Variable

This paper presents the description of principle of foundation and its application to the study of functions of a real variable on the example of a consistent treatment of the necessary mathematical objects (limits, derivatives, integrals of functions and differential equations).

Keywords: foundation; functions of a real variable.