Актуальные проблемы естествознания

В.А. Бубнов

Об уточнении уравнений гидродинамики идеальной жидкости

В работе осуществляется вывод уравнений гидродинамики на основе закона движения Ньютона, в котором масса материальной точки есть суть переменная величина. Для перехода в уравнении Ньютона от материальной точки к динамике частицы жидкости используется оператор полной производной по времени, учитывающий деформационное движение указанной частицы, кроме того, изменение плотности и объема частицы вычисляется через скорость объемного расширения частицы в ее деформационном движении.

Ключевые слова: закон движения Ньютона; частица жидкости; масса; плотность: объемная и сдвиговая вязкости.

При выводе уравнений гидродинамики как идеальной жидкости, то есть жидкости, лишенной сил трения, так и реальной используется второй закон движения Ньютона, общепринятая векторная форма которого такова:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}, \tag{1}$$

где m обозначает массу материальной точки, через $\vec{V}$ — ее скорость, а сумма справа представляет сумму всех сил, действующих на материальную точку.

При изучении второго закона движения Ньютона по современным учебникам физики у каждого может сложиться мнение, что Ньютон этот закон представил в форме уравнения (1). В действительности уравнение (1) Ньютон не писал [5]. Это сделали вместо него последующие исследователи и исказили некоторые особенности данного закона.

В действительности второй закон движения сформулирован Ньютоном так: *изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует* [5: с. 40].

В рамках такого определения мы вправе формульный вид рассматриваемого закона представить так:

$$C\frac{d(m\vec{V})}{dt}=\sum\vec{F}. \qquad (2)$$

Коэффициент пропорциональности C может, с одной стороны, приводить к одинаковой размерности правой и левой частей в (2), с другой стороны, величина C может быть отвлеченным числом.

Отличие уравнения (2) от (1) состоит не только в том, что $C\neq 1$, но и в том, что в (2) масса суть величина переменная, стоящая под знаком производной по времени t. Учитывая это обстоятельство, переписываем уравнение (2):

$$Cm\frac{d\vec{V}}{dt}+C\vec{V}\frac{dm}{dt}=\sum\vec{F}. \qquad (3)$$

Отличие частицы жидкости от материальной точки состоит в том, что она представляет систему материальных точек, каждая из которых имеет различные скорости, следствием которых представляется деформационное движение частицы, характеризуемое скоростями u, v, w вдоль осей x, y, z соответственно. Чтобы отразить это деформационное движение в уравнении (1), Леонард Эйлер ввел оператор полной производной:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}, \qquad (4)$$

состоящий из локальной производной $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и конвективной $u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}+w\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Если теперь ввести плотность ρ жидкости как отношение массы m частицы к единице объема W частицы жидкости, массовую силу:

$$\vec{K}=\vec{i}\cdot\rho X+\vec{j}\cdot\rho Y+\vec{k}\cdot\rho Z,$$

отнесенную к единице объема W, а также поверхностную силу:

$$\vec{P}=\vec{i}\cdot\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)+\vec{j}\cdot\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)+$$
$$+\vec{k}\cdot\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right),$$

отнесенную к единице объема, то уравнение (3) примет вид:

$$C\rho\frac{d\vec{V}}{dt}+\frac{C\vec{V}}{W}\frac{dm}{dt}=\vec{K}+\vec{P}. \qquad (5)$$

Отметим, что производная по времени t вычисляется в (5) по формуле (4), а через $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ обозначены орты координатных осей x, y, z соответственно. Согласно вышеизложенным представлениям вектор $\vec{V}$, входящий в (5), будет определять скорость частицы жидкости, принимаемую в качестве гидродинамической скорости. В системе прямоугольных координат x, y, z этот вектор представляется так:

$$\vec{V}=\vec{i}\cdot u+\vec{j}\cdot v+\vec{k}\cdot w.$$

Еще одно отличие частицы жидкости от материальной точки состоит в том, что согласно общеизвестным представлениям она участвует в так называемом деформационном движении, которое изменяет форму частицы жидкости.

Так, если первоначальная форма частицы принята в виде шарика объемом W_0, то по истечении времени Δt исходная форма превращается в эллипсоид объемом W_1. Количественно такое изменение формы характеризуется величиной:

$$\theta = \frac{W_0 - W_1}{W_0 \Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t}, \tag{6}$$

называемой коэффициентом кубического расширения, отнесенным к единице времени. В современной терминологии этот коэффициент — скорость объемного расширения частицы жидкости.

В [1] эта величина выражена через характеристики деформационного движения так:

$$\theta = -(\varepsilon + A dt + B dt^2), \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};\\ &A = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right);\\ &B = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\theta_1\theta_2\theta_3 - \left(\varepsilon_1\theta_1^2 + \varepsilon_2\theta_2^2 + \varepsilon_3\theta_3^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

При выводе формулы (8) принято, что $\Delta t = dt$, что позволительно ввиду независимости переменной t.

Напомним, что величины в правых частях формул (8) выражаются через составляющие вектора гидродинамической скорости так:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y};\ \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z};\\ &2\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z};\ 2\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};\ 2\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Частица жидкости характеризуется массой m и плотностью ρ, через которые объемы W_0 и W_1 определяются так:

$$W_0 = \frac{m_0}{\rho_0};\ W_1 = \frac{m_1}{\rho_1}. \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда при деформационном движении масса частицы жидкости не изменяется, т. е. $m_1 = m_0 = m$. Тогда из (6) с учетом (10) получаем:

$$\theta = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \Delta t} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \tag{11}$$

Теперь правую часть в (11) подставляем в левую часть (7) и получаем соотношение:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + (\varepsilon + Adt + Bdt^2) = 0, \tag{12}$$

которое связывает изменение плотности со скоростью объемного расширения частицы жидкости. В частности, если для ε принять общепринятое обозначение:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{V},$$

то, пренебрегая в (12) величинами порядка dt и dt^2, получаем соотношение:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\vec{V} = 0, \tag{13}$$

которое называют уравнением неразрывности.

Принимая во внимание изложенные свойства частицы жидкости, рассмотрим уравнение (5) с целью построения на его основе уравнений динамики частицы жидкости. Для этого входящую в него величину изменения массы вычисляем через изменение объема W и плотности ρ так:

$$\frac{dm}{dt} = \rho\frac{dW}{dt} + W\frac{d\rho}{dt}. \tag{14}$$

Здесь изменение объема W можно выразить через скорость объемного расширения θ следующим образом:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{(W_0 - W_1)W_0}{W_0 \cdot \Delta t} = -W_0 \cdot \theta,$$

а $\frac{d\rho}{dt}$ вычисляется по формуле (11). После этого соотношение (14) представим так:

$$\frac{dm}{dt} = \rho\,\theta\,(W - W_0). \tag{15}$$

Введем эмпирический параметр:

$$C_1 = C\left(1 - \frac{W_0}{W}\right), \tag{16}$$

характеризующий величину изменения объема частицы жидкости. После чего с учетом формул (15) и (16) уравнение (5) принимает вид:

$$C\rho\frac{d\vec{V}}{dt} + C_1\rho\vec{V} \cdot \theta = \vec{K} + \vec{P}. \tag{17}$$

Из (11) и (16) принимаем: $\theta = -\operatorname{div}\vec{V}$, что позволяет уравнению (17) придать форму:

$$C\rho\frac{d\vec{V}}{dt} - C_1\rho\vec{V}\operatorname{div}\vec{V} = \vec{K} + \vec{P}, \tag{18}$$

в которой левая часть приняла окончательный вид, а правая часть подлежит дальнейшим исследованиям в связи с установлением характера сил $\vec{K}$ и $\vec{P}$.

Для сил $\vec{K}$ и $\vec{P}$ будем использовать ранее написанные соотношения и спроектируем векторное уравнение (18) на координатные оси, после чего получим уравнение динамики частицы жидкости в напряжениях. Форма их такова:

$$\left.\begin{aligned}
&C\rho\frac{du}{dt}-C_1\rho u\,\mathrm{div}\,\vec{V}=\rho X+\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right),\\
&C\rho\frac{dv}{dt}-C_1\rho v\,\mathrm{div}\,\vec{V}=\rho Y+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right),\\
&C\rho\frac{dw}{dt}-C_1\rho w\,\mathrm{div}\,\vec{V}=\rho Z+\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

В уравнении (19) использованы общеизвестные обозначения: σ_x, σ_y, σ_z — нормальные напряжения и τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} — касательные напряжения. Также при написании уравнений (19) принято во внимание, что $\tau_{xy}=\tau_{yx}$; $\tau_{xz}=\tau_{zx}$; $\tau_{yz}=\tau_{yz}$.

Система уравнений (19) является аналогом уравнения (7) применительно к частице жидкости, и она является исходной для вывода уравнений гидродинамики.

В рамках модели идеальной жидкости предполагается равенство нулю всех касательных напряжений, а нормальные напряжения выражаются через гидростатическое давление p следующим образом:

$$\sigma_x=-p,\ \sigma_y=-p,\ \sigma_z=-p.\tag{20}$$

Теперь для идеальной жидкости уравнения (19) упрощаются и принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&C\rho\frac{du}{dt}-C_1 u\,\mathrm{div}\,\vec{V}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&C\rho\frac{dv}{dt}-C_1 v\,\mathrm{div}\,\vec{V}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&C\rho\frac{dw}{dt}-C_1 w\,\mathrm{div}\,\vec{V}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

Для записи системы уравнений (21) в компактном векторном виде введем оператор «набла»:

$$\nabla=\vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}.$$

Этот оператор есть вектор, поэтому конвективную производную оператора (4) можно представить как скалярное произведение вектора $\vec{V}$ на вектор ∇, т. е.

$$u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}=\left(\vec{V}\cdot\nabla\right).$$

Теперь оператор полной производной можно представить так:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right).\tag{22}$$

Оператор «набла» и выражение (10) позволяют систему (21) их трех уравнений для *u, v, w* представить в форме одного уравнения для вектора гидродинамической скорости $\vec{V}$:

$$C\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+C\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}-C_1\vec{V}\operatorname{div}\vec{V}=\frac{\vec{K}}{\rho}-\frac{1}{\rho}\cdot\nabla p. \qquad (23)$$

В частности, при $C = 1$ и $C_1 = 0$ уравнение (23) переходит в общеизвестное уравнение Эйлера гидродинамики идеальной жидкости. Кроме формы уравнений Эйлера уравнение (23) содержит в себе еще другие виды уравнений. Действительно, пусть $C_1 = 0$. По формуле (16) это означает: $W_0 = W_1$, т. е. в результате деформационного движения объем частицы жидкости не изменяется, что в свою очередь дает $\theta = 0$ и соотношение (7) становится таким:

$$0 = \varepsilon + Adt + Bdt^2. \qquad (24)$$

Согласно общеизвестным представлениям при $\theta = 0\frac{d\rho}{dt} = 0$ (см. формулу 11) и $\operatorname{div}\vec{V}=0$ (см. формулу 13). Эти два условия определяют понятие несжимаемой жидкости. Однако при конечном значении dt из формулы (24) следует, что при $\theta = 0$ величина $\varepsilon = \operatorname{div}\vec{V}\neq 0$.

Данные рассуждения говорят о том, что при $C_1 = 0$ уравнение:

$$C\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+C\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=\frac{\vec{K}}{\rho}-\frac{1}{\rho}\cdot\nabla p \qquad (25)$$

описывает движение как сжимаемой, так и несжимаемой жидкости.

Следующая форма уравнения, получаемая из (23), имеет место, когда $C = 1$, а $C_1 \neq 0$. В этом случае из (23) получаем:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}-C_1\vec{V}\operatorname{div}\vec{V}\frac{\vec{K}}{\rho}-\frac{1}{\rho}\cdot\nabla p. \qquad (26)$$

Здесь параметр C_1 характеризует изменение объема частицы жидкости при деформационном движении последней.

Еще один случай соотношений между параметрами C и C_1 имеет место. Это когда введены обозначения: $C_1 = \beta$ и $C = 1 - \beta$. Введение единого параметра β означает, что параметры C и C_1 вычисляются через объемы W и W_0 согласно следующим формулам:

$$C=\frac{W}{2W-W_0},C_1=\frac{W-W_0}{2W-W_0}.$$

Уравнение (23) для данного случая становится таким:

$$(1-\beta)\ \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\ +(1-\beta)\ (\vec{V}\cdot\nabla)\,\vec{V}\ -\beta\ \vec{V}\operatorname{div}\vec{V}=\frac{\vec{K}}{\rho}-\frac{1}{\rho}\cdot\nabla p. \qquad (27)$$

Для стационарных течений и при отсутствии массовых сил, а также в предположении, что $\operatorname{div}\vec{V}=0,$ уравнение (27) упрощается следующим образом:

$$(1-\beta)(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\cdot\nabla\rho. \qquad (28)$$

В ряде работ автора (см., например, [2–4]) показано, что уравнение (28) допускает интегрирование вдоль линии тока, которое приводит, для несжимаемой жидкости, к соотношению:

$$p + (1 - \beta)\,\rho \frac{V^2}{2} = const, \qquad (29)$$

где $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$. В частности, при $\beta = 0$ соотношение (29) переходит в общеизвестный интеграл Бернулли.

Литература

1. *Бубнов В.А.* О деформационных движениях частицы жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2008. № 1 (20). С. 71−77.
2. *Bubnov V.A.* On Generalized Hydrodynamic Equations Used In Heat Transfer Theory // In. J. Heat Mass Transfer. 1973. Vol. 16. P. 109−119.
3. *Бубнов В.А.* Об уравнении Бернулли для турбулентных течений и гидродинамическом сопротивлении гладких труб // Весцi АН БССР. Серия фiз. Энерг. Навук. 1990. № 1. С. 121−125.
4. *Бубнов В.А.* Расчет местных сопротивлений в проточной части гидропривода // Вестник машиностроения. 1989. № 11. С. 17−20.
5. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. с лат. А.Н. Крылова // Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. VII. М.–Л.: АН СССР, 1936. 696 с.

Literatura

1. *Bubnov V.A.* O deformacionny’x dvizheniyax chasticzy’ zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2008. № 1 (20). S. 71−77.
2. *Bubnov V.A.* On Generalized Hydrodynamic Equations Used In Heat Transfer Theory // In. J. Heat Mass Transfer. 1973. Vol. 16. R. 109−119.
3. *Bubnov V.A.* Ob uravnenii Bernulli dlya turbulentny’x techenij i gidrodinamicheskom soprotivlenii gladkix trub // Vesci AN BSSR. Seriya fiz. E’nerg. Navuk. 1990. № 1. S. 121−125.
4. *Bubnov V.A.* Raschyot mestny’x soprotivlenij v protochnoj chasti gidroprivoda // Vestnik mashinostroeniya. 1989. № 11. S. 17−20.
5. *N’yuton I.* Matematicheskie nachala natural’noj filosofii / Per. s lat. A.N. Kry’lova // Sobranie trudov akademika A.N. Kry’lova. T. VII. M.–L.: AN SSSR, 1936. 696 s.

V.A. Bubnov

About Clarifying the Equations of Hydrodynamics of an Ideal Fluid

The work carried out derivation of the equations of hydrodynamics based on Newton’s laws of motion, in which the mass of a material point is a variable. For transition in Newton's equation from a material point to the dynamics of the fluid particle the author uses operator of total derivative with respect to time, taking into account the deformation movement of said particle, besides the change of the density and volume of the particle is calculated through the rate of volumetric expansion of the particle in its deformation movement.

Keywords: Newton’s law of motion; fluid particle; weight; density; bulk and shear viscosity.