В.А. Бубнов

Об интеграле уравнений движения идеальной жидкости

В работе представлен вывод уравнений идеальной и реальной жидкостей на основе закона движения Ньютона в форме, когда масса материальной точки переменна. Исследованы условия, при которых полученные уравнения допускают интегрирование.

Ключевые слова: частица жидкости; кинематика; динамика; плотность; задачи механики.

Общеизвестно, что при выводе уравнений гидродинамики используются как кинематические свойства частицы жидкости, так и динамические.

Кинематические свойства основываются на том представлении, что частица жидкости участвует в деформационном движении, гидродинамические параметры которого таковы:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ &2\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; 2\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; 2\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь u, v, w — суть составляющие гидродинамической скорости вдоль осей x, y, z соответственно.

Деформационное движение изменяет форму частицы жидкости. Так, если первоначальная форма частицы принята в виде шарика объемом V_0, то по истечении времени Δt исходная форма превращается в эллипсоид объемом V_1. Количественно такое изменение формы характеризуется величиной:

$$\theta = \frac{V_0 - V_1}{V_0 \Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}, \tag{2}$$

называемой коэффициентом объемного расширения, отнесенным к единице времени. В современной терминологии этот коэффициент — скорость объемного расширения частицы жидкости. При использовании формулы (2) позволительно считать $\Delta t = dt$, ввиду произвольности переменной t, принимаемой в качестве времени.

Частица жидкости характеризуется массой m и плотностью ρ, через которые объемы V_0 и V_1 определяются так:

$$V_0 = \frac{m_0}{\rho_0}, V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}. \tag{3}$$

Формулы (3) позволяют рассмотреть три случая изменения коэффициента объемного расширения θ.

Действительно, учитывая (3), формулу (2) переписываем в новом виде:

$$\theta = \frac{m_0\rho_1 - m_1\rho_0}{\rho_1 m_0 \Delta t}. \tag{4}$$

Предположим теперь, что при изменении формы частицы ее масса изменилась незначительно, т. е.

$$\frac{m_1}{m_0} = 1 + \frac{\Delta m}{m_0} \approx 1, \tag{5}$$

что в свою очередь означает малость величины $\frac{\Delta m}{m_0}$, представляющей величину относительного изменения массы частицы. В условиях предположения (5) коэффициент объемного расширения можно связать с изменением плотности следующим образом:

$$\theta = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \Delta t} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \tag{6}$$

Случай, соответствующий формуле (6), означает, что изменение плотности происходит только за счет изменения объема частицы.

Второй случай движения частицы жидкости — это когда во время движения сохраняется ее плотность, т. е. $\rho_1 = \rho_0 = \rho$. Тогда из (4) получаем:

$$\theta = \frac{m_0 - m_1}{m_0 \Delta t} = \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}. \tag{7}$$

И, наконец, при движении частицы жидкости может оказаться, что $\rho_1 m_0 = \rho_0 m_1$. Тогда из (4) следует:

$$\theta = 0. \tag{8}$$

С другой стороны, коэффициент объемного расширения θ выражается через характеристики деформационного движения (1), и в самом общем виде указанное выражение имеет вид [1]:

$$\theta = -(\varepsilon + A dt + B dt^2), \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};\\ &A = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right);\\ &B = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\theta_1\theta_2\theta_3 - \left(\varepsilon_1\theta_1^2 + \varepsilon_2\theta_2^2 + \varepsilon_3\theta_3^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если в (10) положить равными нулю величины θ_1, θ_2, θ_3, а в (9) пренебречь членами порядка dt и dt^2, то с учетом формулы (6) можно выразить изменение плотности через единственную характеристику деформационного движения ε таким образом:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \varepsilon = 0. \qquad (11)$$

На основе этого соотношения вводят понятие несжимаемой жидкости как жидкости, у которой $\rho = const$ и соответственно $\varepsilon = 0$.

Соотношение (11) называют уравнением неразрывности, и, как правило, его используют в такой форме:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\vec{V} = 0, \qquad (12)$$

где $\vec{V}$ — вектор гидродинамической скорости.

В данном рассмотрении соотношение (11) суть частный случай. В общем же случае, когда в полной мере справедливы формулы (9)–(10) в [1] предложены следующие три формы соотношений, связывающие плотность и массу частицы с ее характеристиками деформационного движения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + (\varepsilon + Adt + Bdt^2) = 0; \\ &\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} + (\varepsilon + Adt + Bdt^2) = 0; \\ &(\varepsilon + Adt + Bdt^2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

В аналитической механике материальной точки изучаются две задачи. Сущность первой задачи сводится к тому, что по кинематике материальной точки определяются силы, действующие на материальную точку и являющиеся причиной ее движения. В рамках второй задачи задаются силы, и по ним, на основе уравнений динамики точки, определяются характеристики движения последней.

В таком представлении при решении первой задачи механики частицы жидкости любое из соотношений (13) может быть использовано при построении поля гидродинамической скорости. Традиционно в гидродинамике идеальной жидкости из соотношений (13) используется условие, когда

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (14)$$

В этом случае вводят функцию тока согласно формулам:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

После этого уравнение (14) переписывается так:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0.$$

Решение данного уравнения позволяет определить гидродинамические скорости *u, v, w*. Полученные таким образом скорости подставляются в уравнения движения идеальной жидкости, из которых определяются поверхностные силы, являющиеся причиной данного поля скоростей.

Очевидно, что использование соотношений (13) в более полном виде по сравнению с соотношением (14) позволит расширить класс гидродинамических течений.

Для подстановки и решения второй задачи механики частицы жидкости необходимо написать уравнение движения последней. Обычно для этого используется закон движения Ньютона, написанный для материальной точки, но при этом предполагается, что на частицу жидкости действуют только поверхностные и массовые силы. Что же касается формулы вышеупомянутого закона, то в ней заложено условие постоянства массы частицы жидкости.

В работах [2; 4] впервые при использовании закона движения Ньютона снята гипотеза о постоянстве массы частицы жидкости, и формульный вид данного закона представлен так:

$$c\frac{d(m\vec{V})}{dt}=\sum\vec{F}. \qquad (15)$$

Коэффициент пропорциональности сможет, с одной стороны, приводить к одинаковой размерности правой и левой частей в (15), с другой стороны, величина сможет быть отвлеченным числом.

Особенность соотношения (15) состоит не только в том, что $c \neq 1$, но и в том, что в (15) масса суть величина переменная, стоящая под знаком производной по времени t. Учитывая это обстоятельство, переписываем уравнение (15):

$$cm\frac{d\vec{V}}{dt}+c\vec{V}\frac{dm}{dt}=\sum\vec{F}. \qquad (16)$$

Теперь следует вычислить изменение массы $\frac{dm}{dt}$ для движущейся частицы жидкости. Для этого предположим, что в формуле $m = \rho V = \rho dxdydz$ изменяется со временем и плотность ρ, и объем V частицы жидкости. Тогда

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d(\rho V)}{dt}=\rho\frac{dV}{dt}+V\frac{d\rho}{dt}.$$

Далее учитываем выражение для величины θ по (2) и получаем:

$$\rho\frac{dV}{dt}=\rho\frac{\Delta V}{\Delta t}=\rho V_0\cdot\frac{V_1-V_0}{V_0\Delta t}=-\rho V_0\cdot\theta. \qquad (17)$$

Теперь, с учетом формул (6) и (17), исходному уравнению (16) можно придать вид:

$$cm\frac{d\vec{V}}{dt}+c\vec{V}\cdot\rho\theta\,(V-V_0)=\sum\vec{F}. \qquad (18)$$

Далее делим левую и правую части в (16) на величину объема V частицы жидкости, полагаем $\theta = -\varepsilon = -\mathrm{div}\,\vec{V}$, после чего получаем:

$$c\rho\frac{d\vec{V}}{dt}-c\left(1-\frac{V_0}{V}\right)\vec{V}\cdot\rho\,\varepsilon=\vec{K}+\vec{P}. \qquad (19)$$

Здесь из всех сил $\sum \vec{F}$, действующих на частицу жидкости, выделяются векторы $\vec{K}$ и $\vec{P}$, представляющие массовые и поверхностные силы соответственно.

В уравнении (19) введем дополнительный параметр:

$$c_1 = c\left(1 - \frac{V_0}{V}\right), \tag{20}$$

который равен нулю, если $V_0 = V$. После этого вместо (19) будем иметь:

$$c\rho\frac{d\vec{V}}{dt} - c_1\rho\vec{V}\,\mathrm{div}\vec{V} = \vec{K} + \vec{P}. \tag{21}$$

Отличие частицы жидкости от материальной точки состоит в том, что она представляет систему материальных точек, каждая из которых имеет различные скорости, следствием которых представляется деформационное движение частицы, характеризуемое скоростями *u, v, w* вдоль осей *x, y, z* соответственно. Чтобы отразить это деформационное движение в уравнении (21), воспользуемся оператором полной производной, введенным Леонардом Эйлером:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}, \tag{22}$$

состоящим из локальной производной $\frac{\partial}{\partial t}$ и конвективной: $u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$.

Векторы $\vec{K}$ и $\vec{P}$ в правой части (21) обычно представляются так:

$$\vec{K} = \vec{i}\cdot\rho X + \vec{j}\cdot\rho Y + \vec{k}\cdot\rho Z,$$

$$\vec{P} = \vec{i}\cdot\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right) + \vec{j}\cdot\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right) +$$

$$+\vec{k}\cdot\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right).$$

Здесь *X, Y, Z* — составляющие массовой силы на оси *x, y, z* соответственно, σ_x, σ_y, σ_z — нормальные напряжения, а τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} — касательные напряжения. Обычно в гидродинамике предполагается, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Проектируя уравнение (21) на координатные оси, получаем следующую систему уравнений динамики частицы жидкости в напряжениях:

$$\left.\begin{aligned}
&C\rho\frac{du}{dt} - C_1\rho u\,\mathrm{div}\,\vec{V} = \rho X + \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right),\\
&C\rho\frac{dv}{dt} - C_1\rho v\,\mathrm{div}\,\vec{V} = \rho Y + \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right),\\
&C\rho\frac{dw}{dt} - C_1\rho w\,\mathrm{div}\,\vec{V} = \rho Z + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

В рамках модели идеальной жидкости предполагается равенство нулю всех касательных напряжений, а нормальные напряжения выражаются через гидростатическое давление p следующим образом:

$$\sigma_x = -p,\ \sigma_y = -p,\ \sigma_z = -p. \tag{24}$$

Для записи системы уравнений гидродинамики в компактном векторном виде введем оператор «набла»:

$$\nabla = \vec{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}.$$

Этот оператор есть вектор, поэтому конвективную производную оператора (22) можно представить как скалярное произведение вектора $\vec{V}$ на вектор ∇, т. е.

$$u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \left(\vec{V}\cdot\nabla\right).$$

Теперь оператор полной производной можно представить так:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right). \tag{25}$$

Для выражения величин напряжений, входящих в правую часть (2), воспользуемся общеизвестной гипотезой Стокса, после чего векторная форма уравнений (23) представляется так:

$$c\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + c\rho(\vec{V}\cdot\nabla)\,\vec{V} - c_1\vec{V}\,\mathrm{div}\,\vec{V} = \vec{K} - \nabla\cdot p + \frac{\mu}{3}\nabla\cdot(\mathrm{div}\,\vec{V}) + \mu\nabla^2\vec{V}. \tag{26}$$

Здесь через μ обозначена молекулярная вязкость. Введем дополнительный оператор (нибл квадрат):

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Уравнение (26) переходит в общеизвестные уравнения Навье – Стокса в случае, когда $c = 1$ и $c_1 = 0$.

Параметры c и c_1 можно выразить через единственный параметр таким образом: $c_1 = \beta$ и $c = 1 - \beta$. В данном случае параметры c и c_1 вычисляются через объемы V и V_0 согласно следующим формулам:

$$c = \frac{V}{2V - V_0},\ \ c = \frac{V - V_0}{2V - V_0}. \tag{27}$$

Введение параметра позволяет уравнение (26) переписать в ином виде:

$$\begin{aligned}&(1-\beta)\,\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (1-\beta)\,\rho\,(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} - \beta\ \vec{V}\,\mathrm{div}\,\vec{V} =\\ &= \vec{K} - \nabla\cdot p + \frac{\mu}{3}\nabla\cdot(\mathrm{div}\,\vec{V}) + \mu\nabla^2\vec{V}.\end{aligned} \tag{28}$$

При $t = (1 - \beta)\,t_1$ уравнение становится таким:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t_1}+(1-\beta)\,\rho\,(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}-\beta\,\vec{V}\,\mathrm{div}\,\vec{V}=$$
$$=\vec{K}-\nabla\cdot p+\frac{\mu}{3}\nabla\cdot(\mathrm{div}\,\vec{V})+\mu\nabla^2\vec{V}. \tag{29}$$

Уравнение (29) из молекулярно-кинетических представлений впервые получено в [9], а из несколько других соображений в [3]. Кроме того, в работах [5–6] показано, что уравнение (29) по форме совпадает с уравнением для вектора осредненной скорости турбулентного движения, когда турбулентные напряжения пропорциональны квадратам и попарным произведениям составляющих скорости осредненного движения.

Рассмотрим случай, когда при движении частицы жидкости ее объем не изменяется, т. е. $V = V_0$. Тогда согласно (27) $c_1 = 0$, а $c = 1$, и уравнение (26) переходит в уравнение Навье – Стокса. В свою очередь равенство объемов V и V_0 в соответствии с (2) означает равенство нулю коэффициента объемного расширения θ. При θ = 0 из формулы (6) следует постоянство плотности ρ, что из (11) влечет ε = 0. Это традиционное определение условия несжимаемости жидкости. Однако согласно последнему соотношению в (13) при θ = 0, величина ε не равна нулю с точностью до величины порядка dt и dt^2. Следовательно, при движении частицы жидкости при неизменности ее объема плотность и масса частицы изменяются по закону: $\rho_1 \mathrm{m}_0 = \rho_0 m_1$.

Если же в уравнениях (26) или в (28) $\mathrm{div}\,\vec{V}$ = ε = 0, то из первого соотношения (13) следует, что и в данном случае плотность жидкости изменяется во время ее движения. Таким образом, кинематические соотношения (13) изменяют условия сжимаемости жидкости.

Для идеальной жидкости, т. е. жидкости, лишенной сил трения, уравнение (26) упрощается так:

$$c\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+c\rho(\vec{V}\cdot\nabla)\,\vec{V}-c_1\vec{V}\,\mathrm{div}\,\vec{V}=\vec{K}-\nabla\cdot p. \tag{30}$$

Уравнение (30) допускает интегрирование при $c_1 = 0$, результат которого имеет наиболее простой вид, когда $\vec{K}$ = 0 и гидродинамические скорости не зависят от времени. При таких ограничениях интегрированию будет подвергаться уравнение:

$$c\rho(\vec{V}\cdot\nabla)\,\vec{V}=-\nabla\cdot p, \tag{31}$$

которое в проекциях на оси *x, y, z* принимает вид следующей системы:

$$\left.\begin{aligned}
&c\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&c\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&c\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

В системе уравнений (32) от скоростей u, v, w перейдем к скорости V_S как скорости частицы жидкости при ее движении вдоль линии тока. Для этого введем уравнение линии тока:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{ds}{V_S}, \tag{33}$$

где ds — элемент линии тока. Из (33) можно также получить соотношения:

$$\frac{dx}{ds}=\frac{u}{V_S}=l,\ \frac{dy}{ds}=\frac{v}{V_S}=n,\ \frac{dz}{ds}=\frac{w}{V_S}=q, \tag{34}$$

в которых через l, n, q обозначены косинусы углов, которые образуют направления скорости V_S с осями x, y, z соответственно. Формулы (34) означают, что

$$V_S^2=u^2+v^2+w^2,\ V_S=lu+nv+qw. \tag{35}$$

Для перехода в левой части уравнений (32) от производных по x, y, z к производной по направлению s воспользуемся общеизвестной формулой математического анализа:

$$\frac{d}{ds}=l\frac{\partial}{\partial x}+n\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}.$$

После указанных преобразований в системе (32) умножаем уравнения этой системы на l, n, g соответственно и, складывая полученные при этом соотношения, получаем:

$$\frac{c}{2}\frac{d}{ds}(V_S^2)=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}. \tag{36}$$

Теперь умножим левую и правую части в (36) на дифференциал ds и получим вместо (36) следующее соотношение:

$$\frac{c}{2}d(V_S^2)=-\frac{dp}{\rho}, \tag{37}$$

которое после взятия интеграла слева и справа принимает вид:

$$\frac{c}{2}V_S^2+\int\frac{dp}{\rho}=const. \tag{38}$$

Заметим, что для получения соотношения (37) необязательно переходить в уравнениях (32) к скорости вдоль линии тока, для этого достаточно с помощью левых и правых частей системы (32) выделить дифференциалы квадрата скорости $V^2=u^2+v^2+w^2$ и давления p. Тогда в (38) вместо квадрата скорости вдоль линии тока V_S^2 будет фигурировать квадрат скорости в любой точке потока, равный V^2.

Уравнение (38) является первым интегралом уравнений идеальной жидкости, представленных в форме системы (32).

Соотношение (38) получено в [7] из рассмотрения условия, когда приращение живой силы струйки тока балансируется работой сил гидродинамического давления. Там же в [7] показано, что при малом относительном перепаде давления вычисление интеграла в (38) упрощается и соотношение (38) принимает вид:

$$\frac{c}{2}V_S^2+\frac{p}{\rho}=const. \tag{39}$$

Эта форма интеграла, имеющая место для сжимаемой жидкости, совпадает с аналогичным интегралом системы (32), полученным в условиях постоянства плотности.

Заметим, что при c = 1 соотношение (39) совпадает с общеизвестным интегралом Бернулли.

При решении ряда задач гидравлики от скорости V_S переходят к средней скорости W живого сечения гидродинамического потока. Тогда соотношение (39) необходимо переписать так [7]:

$$\alpha c\frac{W^2}{2}+\frac{p}{\rho}=const, \tag{40}$$

где α — так называемый корректив кинетической энергии гидродинамического потока. Согласно расчетам, выполненным в [7], для ламинарных потоков α = 2, а для турбулентных α = 1,045.

Чтобы из уравнений (29) получить соотношение, аналогичное соотношению (40), необходимо в левой части (29) положить: $\operatorname{div}\vec{V}=0$ и ввести такие же ограничения, которые использовались при получении уравнений (32). Применяя затем изложенную выше методику интегрирования к таким образом упрощенной системе (29), получаем:

$$\alpha\,(1-\beta)\,\frac{W^2}{2}+\frac{p}{\rho}=const. \tag{41}$$

Заметим, что соотношение (41) применимо к течению несжимаемой жидкости, так как при условии ε = 0 из первого соотношения (13) следует, что плотность изменяется с точностью до слагаемых порядка dt и dt^2.

В работе [8] для анализа изотропных течений использовалось уравнение (41). Оказалось, что величина параметра β влияет на характер перехода от дозвуковых течений к звуковым.

Литература

1. *Бубнов В.А.* О деформационных движениях частицы жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2008. № 1 (20). С. 71−77.

2. *Бубнов В.А.* Об изменении плотности в гидродинамическом потоке // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2014. № 4 (16). С. 9−19.

3. *Бубнов В.А.* Одно замечание к специальным решениям уравнений гидродинамики// Инженерно-физический журнал. 1970. Т. XIX. № 1. С. 124–128.

4. *Бубнов В.А.* Об уравнениях гидродинамики с переменной плотностью //Седьмые Поляховские чтения: тезисы докладов Междунар. конфер. по механике (Санкт-Петербург, 2–6 февраля 2015 г.). М.: Издатель И.В. Балабанов, 2015. С. 86.

5. *Бубнов В.А.* Об одной форме уравнений турбулентности // Гидродинамика и теория упругости: межвуз. сб. науч. тр. / Под ред. Л.В. Андреева. Вып. 32. Днепропетровск: ДГУ, 1984. С. 29–36.

6. *Бубнов В.А.* О винтовых движениях в турбулентных потоках // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2012. № 2 (10). С. 9−15.

7. *Бубнов В.А.* Об уточнении уравнения Даниила Бернулли в гидродинамике // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 1 (17). С. 9–21.

8. *Бубнов В.А.* Турбулентные изоэнтропные течения // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71. № 2. С. 330–335.

9. *Предводителев А.С.* О молекулярно-кинетическом обосновании уравнений гидродинамики // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1948. № 4. С. 545–560.

Literatura

1. *Bubnov V.A.* O deformacionny’x dvizheniyax chasticzy’ zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2008. № 1 (20). S. 71−77.

2. *Bubnov V.A.* Ob izmenenii plotnosti v gidrodinamicheskom potoke // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2014. № 4 (16). S. 9−19.

3. *Bubnov V.A.* Odno zamechanie k special’ny’m resheniyam uravnenij gidrodinamiki // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1970. T. XIX. № 1. S. 124–128.

4. *Bubnov V.A.* Ob uravneniyax gidrodinamiki s peremennoj plotnost’yu // Sed’my’e Polyaxovskie chteniya: tezisy’ dokladov Mezhdunar. konfer. po mexanike (Sankt-Peterburg, 2–6 fevralya 2015 g.). M.: Izdatel’ I.V. Balabanov, 2015. S. 86.

5. *Bubnov V.A.* Ob odnoj forme uravnenij turbulentnosti // Gidrodinamika i teoriya uprugosti: mezhvuz. sb. nauch. tr. / Pod red. L.V. Andreeva. Vy’p. 32. Dnepropetrovsk: DGU, 1984. S. 29–36.

6. *Bubnov V.A.* O vintovy’x dvizheniyax v turbulentny’x potokax // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2012. № 2 (10). S. 9−15.

7. *Bubnov V.A.* Ob utochnenii uravneniya Daniila Bernulli v gidrodinamike // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2015. № 1 (17). S. 9–21.

8. *Bubnov V.A.* Turbulentny’e izoe’ntropny’e techeniya // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1998. T. 71. № 2. S. 330–335.

9. *Predvoditelev A.S.* O molekulyarno-kineticheskom obosnovanii uravnenij gidrodinamiki // Izvestiya AN SSSR. Otdelenie texnicheskix nauk. 1948. № 4. S. 545–560.

V.A. Bubnov

On Integral of Equations of Motion of an Ideal Fluid

The paper presents the derivation of the equations of ideal and real fluids based on Newton’s laws of motion in the form in which the mass of a material point is variable. The conditions under which the obtained equations allow integration are searched.

Keywords: fluid particle; kinematics; dynamics; density; problems of mechanics.