В.А. Бубнов

О газодинамических течениях идеального газа

В работе осуществляется вывод уравнений газодинамики при условии, когда в процессе движения изменяется масса частицы жидкости. На основе полученных уравнений предлагается решение задачи об истечении газа из резервуара. Отмечаются новые режимы истечения.

Ключевые слова: частицы жидкости; уравнение Ньютона; идеальный газ; число Маха; скорость звука; критические скорость и давление.

Феноменологический метод вывода уравнений гидродинамики основывается на применении к частице жидкости второго закона движения Ньютона, общепринятая векторная форма которого такова:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}, \tag{1}$$

где через m обозначена масса материальной точки, через $\vec{V}$ — её скорость, а сумма справа представляет сумму всех сил, действующих на данную точку.

В действительности формула (1) написана не Ньютоном, а другими авторами, и в таком виде она вошла в учебники по физике. Ньютон же только представил словесную формулировку своего закона следующим образом: *изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует* [5: с. 40].

В рамках такого определения формульный вид рассматриваемого закона можно представить так:

$$C\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \vec{F}. \tag{2}$$

Здесь введён коэффициент пропорциональности C, который с одной стороны может приводить к одинаковой размерности правой и левой частей в (2), а с другой стороны при общепринятых размерностях величин, входящих в (2), может быть отвлечённым числом.

В работах автора [1–2] уравнение (2) было использовано для вывода уравнений гидродинамики, в которых плотность ρ суть величина переменная.

Отличие частицы жидкости от материальной точки состоит в том, что частица жидкости наряду с поступательным движением участвует в деформационном движении, которое изменяет её форму.

Чтобы отразить это деформационное движение Леонард Эйлер ввёл оператор полной производной:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z},$$

состоящий из локальной производной $\frac{\partial}{\partial t}$ и конвективной $u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$, где *u, v, w* суть гидродинамические скорости вдоль осей *x, y, z* соответственно.

Если теперь ввести плотность ρ жидкости как отношение массы *m* частицы к единице объёма *W* частицы жидкости, а также поверхностную силу

$$\vec{P}=\vec{i}\cdot\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\vec{j}\cdot\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\vec{k}\cdot\frac{\partial\sigma_z}{\partial z},$$

отнесённую к единице объёма, то уравнение (2) примет вид:

$$C\rho\frac{\partial\vec{V}}{dt}+\frac{C\vec{V}}{W}\cdot\frac{dm}{dt}=\vec{P}. \tag{3}$$

Отметим, что в выражении для поверхностной силы $\vec{P}$ через $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ обозначены орты координатных осей *x, y, z*, соответственно, а через $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ — нормальные напряжения.

Следуя [1–2], изменение массы вычислим через изменение объёма *W* и плотности ρ так:

$$\frac{dm}{dt}=\rho\frac{dW}{dt}+W\frac{d\rho}{dt}. \tag{4}$$

Теперь изменение объёма *W* выражаем через скорость объёмного расширения Θ следующим образом:

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{(W_0-W_1)W_0}{W_0\cdot\Delta t}=-W_0\cdot\Theta, \tag{5}$$

где для Θ будем использовать общепринятые соотношения:

$$\Theta=\frac{\rho_1-\rho_0}{\rho_1\Delta t}=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \tag{6}$$

Кроме того, воспользуемся общепринятым уравнением неразрывности:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+div\vec{V}=0. \tag{7}$$

Соотношения (5)–(7) позволяют уравнение (4) переписать так:

$$\frac{dm}{dt}=\rho\,\Theta(W-W_0). \tag{8}$$

Введём эмпирический параметр

$$C_1=C\left(1-\frac{W_0}{W_1}\right), \tag{9}$$

характеризующий величину изменения объёма частицы жидкости. После чего с учётом формул (8−9) уравнение (3) принимает вид:

$$C\rho\frac{d\vec{V}}{dt}+C_1\rho\vec{V}\cdot\Theta=\vec{P}. \tag{10}$$

Из (6) и (7) принимаем: $\Theta=-div\vec{V}$, что позволяет уравнению (10) придать новую форму:

$$C\rho\frac{d\vec{V}}{dt}-C_1\rho\vec{V}\,div\vec{V}=\vec{P}. \tag{11}$$

В проекциях на координатные оси векторное уравнение (11) представит следующую систему уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned}
&C\rho\frac{du}{dt}-C_1\rho\,u\,div\vec{V}=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x},\\
&C\rho\frac{dv}{dt}-C_1\rho\,v\,div\vec{V}=\frac{\partial\sigma_y}{\partial y},\\
&C\rho\frac{dw}{dt}-C_1\rho\,w\,div\vec{V}=\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

В дальнейшем для анализа газодинамических течений воспользуемся случаем, когда $C_1 = 0$, что свидетельствует о неизменности объёма W частицы жидкости в процессе её движения. Кроме того, нормальные напряжения отождествим с гидростатическим давлением p, т. е. будем считать, что $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p.$ Теперь система уравнений (12) примет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&c\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&c\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&c\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Напомним, что идеальным газом называют газ, уравнение состояния которого имеет вид:

$$p=\rho RT, \tag{14}$$

где p — давление, ρ — плотность газа, T — температура, а R — универсальная газовая постоянная. Будем предполагать отсутствие теплообмена между частицами газа, тогда газодинамические течения происходят при постоянной температуре. В таком случае уравнение (14) в процессе движения газа устанавливает связь между давлением и плотностью.

Теперь выполним следующие преобразования левой части первого уравнения в (13). Введем в нее добавочно два члена $v\frac{\partial v}{\partial x}$ и $w\frac{\partial w}{\partial x}$ со знаком плюс и те же два члена со знаком минус, что не изменит рассматриваемого соотношения. После этого объединим следующие три слагаемых со знаком плюс

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x},$$

которые тождественно равны соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x}.$$

Что же касается введенных членов со знаком минус, то каждый из них присоединим к одному из оставшихся членов первоначального соотношения, а именно к имеющему тоже множитель перед производной. Таким образом получим две группы членов: $v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ и $w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Здесь выражения в круглых скобках суть проекции угловых скоростей вихря, именно:

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=-2\omega_z,\quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=2\omega_y.$$

После указанных преобразований соотношения в левой части первого уравнения в (13) принимают вид:

$$c\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x}+2(w\omega_y-v\omega_z)\right].$$

Аналогичным преобразованиям следует подвергнуть и другие левые части системы (13). В результате чего исходной системе (13) придадим следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&c\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x}+2(w\omega_y-v\omega_z)\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&c\left[\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial y}+2(u\omega_z-w\omega_x)\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&c\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial z}+2(w\omega_x-v\omega_y)\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

В дальнейшем будем изучать потенциальные течения, для которых $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$ и существует потенциал скорости φ, определяемый так:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Последние соотношения позволяют видоизменить входящие в систему (15) производные от u, v, w по времени t, замечая, что:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

В итоге для таких течений система уравнений (15) упрощается так:

$$\left.\begin{aligned} c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ c\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Умножая первое уравнение из системы (16) на dx, второе на dy и третье на dz и почленно складывая их, получаем одно уравнение, имеющее следующий вид:

$$d\left[c\left(\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right]=\frac{1}{\rho}d\rho.$$

В этом уравнении символ d имеет значение дифференциала лишь в пространстве — по координатам в один и тот же момент времени, так как в числе дифференциальных выражений не имеется производной по времени t.

Последнее соотношение позволяет произвести интегрирование, результат которого таков:

$$c\left(\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+f(t)=-\int\frac{d\,p}{\rho}. \qquad (17)$$

Если в (17) положить $c = 1$, то данное соотношение переходит в известный в гидродинамике интеграл Лагранжа, но эмпирическая константа c расширяет возможности данного уравнения в процессе описания газодинамических течений.

Для стационарных течений, которые подлежат дальнейшему изучению, соотношение (17) имеет более простой вид:

$$c\frac{V^2}{2}+const=-\int\frac{d\,p}{\rho}. \qquad (18)$$

Заметим, что из вывода уравнения (18) следует его справедливость в любой точке газодинамического потока, в том числе и вдоль линии тока.

Вычисление интеграла в правой части (18) произведем для адиабатического процесса, когда давление p и плотность ρ изменяется по закону Пуассона:

$$p = k\rho^k,$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{c_v}$ суть отношение теплоемкостей. Для удобства интегрирования указанный закон перепишем так:

$$\rho = \frac{1}{k} p^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{k} p^{\varepsilon}.$$

Теперь возьмем определенный интеграл

$$\int_p^{p_1} k \frac{d\,p}{p^{\varepsilon}} = k \frac{(p_1^{1-\varepsilon} - p^{1-\varepsilon})}{(1-\varepsilon)}, \tag{19}$$

который является точным значением правой части в (18).

Если теперь в правую часть (19) вместо p_1 подставить $p + \Delta p$, то получим:

$$\int_p^{p_1} k \frac{d\,p}{p^{\varepsilon}} = \frac{k\left[(p+\Delta p)^{(1-\varepsilon)} - p^{(1-\varepsilon)}\right]}{(1-\varepsilon)} = \frac{k\,p^{(1-\varepsilon)}\left[\left(1+\dfrac{\Delta p}{p}\right)^{(1-\varepsilon)}\right]}{(1-\varepsilon)}.$$

Разлагаем двучлен в квадратной скобке по биному Ньютона:

$$\left[\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{(1-\varepsilon)} - 1\right] = 1 + (1-\varepsilon)\frac{\Delta p}{p} + \ldots - 1 = (1-\varepsilon)\frac{\Delta p}{p}\ldots,$$

при этом высшим степеням пренебрегаем. Тогда:

$$\int_p^{p_1} k \frac{d\,p}{p^{\varepsilon}} = \frac{k\,p^{(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \cdot \frac{\Delta p}{p} = \frac{k\Delta p}{p^{\varepsilon}} = \frac{\Delta p}{\rho}. \tag{20}$$

Соотношение (20) позволяет при малых значениях $\dfrac{\Delta p}{\rho}$ равенство (18) представить так:

$$c\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const, \tag{21}$$

что по форме совпадает с аналогичным уравнением для несжимаемой жидкости.

Традиционно соотношению (21) придают вид

$$p + c\rho\frac{V^2}{2} = const,$$

который представляет неизменяемую в течение движения сумму потенциальной и кинетической энергии частицы жидкости. Однако изменение плотности жидкости влечёт изменение внутренней энергии частицы жидкости *U*, которая для идеального газа зависит только от температуры *T* и определяется по формуле:

$U = c_V T$.

В равновесной термодинамике внутреннюю энергию объединяют с величиной $\frac{p}{\rho}$ введением специальной величины i, называемой энтальпией и определяемой так:

$$i = U + \frac{p}{\rho}. \tag{22}$$

Добавим внутреннюю энергию U в левую часть соотношения (21), после чего получим равенство

$$c\frac{V^2}{2} + i = const, \tag{23}$$

которое при $c = 1$ известно в газодинамике как уравнение Сен-Венана и Ванцеля.

Для идеального газа величина энтальпии определяется так:

$$i = c_V T + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{p}{\rho},$$

что позволяет уравнение (23) представить в следующей форме [3]:

$$\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{p}{\rho} + c\frac{V^2}{2} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{p_0}{\rho_0}. \tag{24}$$

В (24) индекс ноль означает параметры газа заторможенного потока, а γ — отношение теплоемкостей. Как и ранее будем считать, что справедлив закон Пуассона, тогда скорость звука определяется согласно общеизвестной формуле:

$$a = \sqrt{\left(\gamma\frac{p}{\rho}\right)} = \sqrt{\gamma RT}.$$

Это позволяет придать уравнению (24) вид:

$$\frac{a^2}{(\gamma-1)} + c\frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{(\gamma-1)}. \tag{25}$$

Отношение скорости течения газа к местной скорости звука называется числом Маха M. Тогда энергетическое уравнение (25) представляется таким образом:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{c(\gamma-1)}{2}M^2. \tag{26}$$

Среднюю скорость течения V, равную скорости звука, назовем средней критической скоростью V_K. Из (26) легко усмотреть, что

$$V_K^2 = \frac{2}{2 + c(\gamma-1)}a_0^2.$$

Из (24) нетрудно получить

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{c(\gamma-1)}{2}M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Теперь полагаем $M = 1$ и $p = p_K$, после чего последнее соотношение приобретает вид:

$$\frac{p_K}{p_0} = \left[\frac{2}{2 + c(\gamma - 1)}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{27}$$

Рассмотрим задачу об истечении газа из резервуара через насадок, когда вследствие кратковременного пребывания газа в пределах насадка можно пренебречь теплообменом с окружающей средой. Пусть давление внутри резервуара равно p_0, плотность — ρ_0, а скоростью движения газа внутри резервуара можно пренебречь. Параметры газа на выходе из насадка будем обозначать без индексов. Воспользуемся уравнением (24), решив его относительно скорости течения:

$$V = \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{c(\gamma - 1)}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\right)}. \tag{28}$$

При установившемся движении газа его массовый расход $Q = \rho\omega V$ или с учетом (28) получаем:

$$Q = \omega\sqrt{\left(\frac{2\gamma p_0\rho_0}{c(\gamma - 1)}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\right)}. \tag{29}$$

В (29) через ω обозначена площадь живого сечения потока. Если в (29) положить $c = 1$, то получим общеизвестную формулу Сен-Венана и Ванцеля. Однако формула (29) имеет более общий характер, так как она содержит поправку на множитель c, характеризующий местные сопротивления в насадках. Для различного рода местных сопротивлений в [4], получены эмпирические формулы для параметра c.

Для определения максимального расхода возьмем производную от правой части в (29) по переменной $\frac{p}{p_0}$ и приравняем ее к нулю. Тогда после простых преобразований получим:

$$\frac{p_M}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{30}$$

Здесь через p_M обозначено предельное давление на выходе из насадка. Сравнивая (27) и (30), замечаем, что $p_K \neq p_M$ вопреки общеизвестным представлениям. Для получения скорости V_M необходимо подставить в (28) вместо $\frac{p}{p_0}$ величину $\frac{p_M}{p_0}$, определенную формулой (30). Тогда будем иметь:

$$V_M = \frac{1}{\sqrt{c}} a_M,$$

где a_M — скорость звука при давлении p_M. Отсюда следует, что при истечении идеального газа из резервуара максимальный расход имеет место при скорости истечения, не равной скорости звука.

Из (29) таким же образом получаем формулу и для максимального расхода:

$$Q_M = \omega\sqrt{\left(\frac{\gamma p_0 \rho_0}{c}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right)}. \tag{31}$$

В практике газодинамических расчетов при адаптировании к опытным фактам формулы Сен-Венана и Ванцеля в нее вводят эмпирический множитель μ, называемый коэффициентом расхода. Это приводит к следующей формуле для вычисления расхода газа при его истечении из резервуара:

$$Q = \mu\omega\sqrt{\left(\frac{2\gamma p_0 \rho_0}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\right)}. \tag{32}$$

Недостаток этой формулы заключается в том, что μ определяется только опытным путем и зависит как от режимов истечения, так и от конструктивных особенностей насадка.

Сравнивая (29) и (32), получаем:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{c}} = \psi\sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}. \tag{33}$$

Величина ψ вместо μ здесь введена для удобства дальнейших расчетов. В [3] показано, что для выбранной конструкции насадка коэффициент расхода не есть постоянная величина, а зависит от величины проходного сечения в насадке, т. е. в процессе регулирования режимами истечения μ измеряется от нуля до бесконечности. Предложенные в [4] формулы для множителя c можно рассматривать как расчетные схемы для эмпирического множителя μ в (32) в зависимости от характера газодинамических течений.

С использованием (33) формулу (27) можно переписать так:

$$\frac{p_K}{p_0} = \left[\frac{2\psi^2}{\gamma+2\psi^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{34}$$

Если $c = 1$, то $p_K = p_M$; тогда по (30) для воздуха ($\gamma = 1{,}4$) будем иметь: $\frac{p_M}{p_0} = \frac{p_K}{p_0} = 0{,}5283$. Указанное значение $\frac{p_K}{p_0}$ можно получить из (34), если принять $\psi = 1{,}8709$. Рисунок 1 иллюстрирует поведение функции $\frac{p_K}{p_0} = f(\psi)$, рассчитанной согласно (34).

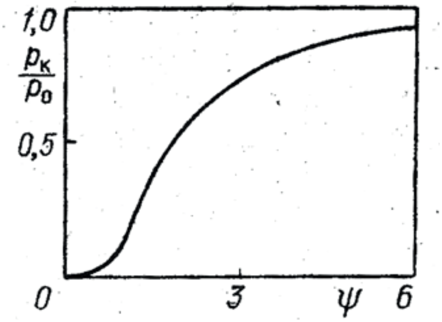

Рис. 1. Изменение критического давления при истечении газа из резервуара

Определим величину критического расхода подстановкой (27) в (29). После чего будем иметь:

$$Q_K = \omega\sqrt{\left(\gamma p_0 \rho_0 \left[\frac{2}{2+c(\gamma-1)}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right)}. \tag{35}$$

Нетрудно показать, что $Q_K = Q_M$ при $\psi = 1{,}8709$.

Приведем еще одно интересное соотношение:

$$\frac{Q_M}{Q_K} = \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right)}}{\left(\frac{\gamma}{(\gamma-1)\psi^2}\left[\frac{2\psi^2}{2\psi^2+\gamma}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right)}. \tag{36}$$

Из рисунка 2 следует, что для воздушных потоков зависимость $\frac{Q_M}{Q_K} = f(\psi)$ имеет минимум при $\psi = 1{,}8709$.

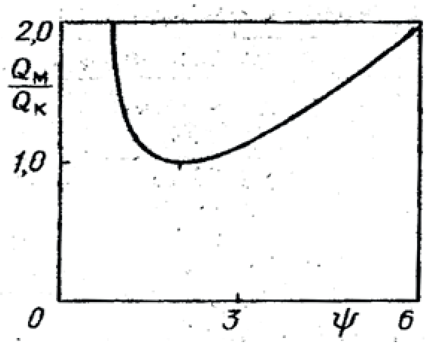

Рис. 2. Расходная характеристика

Обычно в теоретических расчетах оперируют безразмерным расходом $\overline{Q} = \dfrac{Q}{Q_M}$, формулу для вычисления которого нетрудно получить из (29) и (31). Она имеет вид:

$$\overline{Q} = \sqrt{\left(\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\right)}. \tag{37}$$

Соотношение (37) определяет характер истечения воздуха из резервуара в зависимости от отношения давления $\dfrac{p}{p_0}$ (рис. 3). На рисунке 3 отметим точку *2*, где $\dfrac{p}{p_0} = \dfrac{p_M}{p_0} = 0{,}5283$, $\overline{Q} = 1$, $\dfrac{Q_M}{Q_K} = 1$ и ψ = 1,8709. В этих условиях при $\dfrac{p}{p_0} < \dfrac{p_M}{p_0}$ истечение происходит с максимальным расходом Q_M вплоть до точки *2*, а после нее $\left(\dfrac{p}{p_0} > \dfrac{p_M}{p_0}\right)$ расход уменьшается с ростом значений $\dfrac{p}{p_0}$. Это общеизвестный характер истечения, но в рамках излагаемой концепции он представляет частный случай, имеющий место только при ψ = 1,8709.

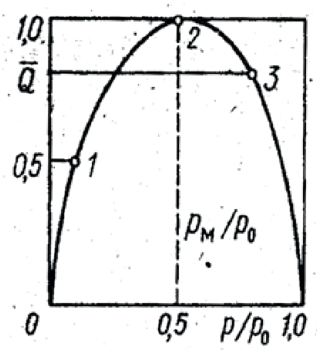

Рис. 3. Различные режимы истечения газа

Для дальнейшего анализа используем формулу:

$$\frac{V_M}{V_K} = \sqrt{\left(\frac{(\gamma-1)(\gamma+2\psi^2)}{\gamma(\gamma+1)}\right)}, \tag{38}$$

определяющую отношение максимальной скорости V_M истечения критической V_K.

Теперь рассмотрим случай, когда у насадка обобщенный коэффициент расхода ψ < 1,8709. Пусть ψ = 1, то по (39) имеем $\dfrac{p_K}{p_0} = 0{,}1561$. Отложим это значение на оси абсцисс (рис. 3) и через эту точку проведем прямую, параллельную оси ординат до пересечения с кривой $\overline{Q} = f\left(\frac{p}{p_0}\right)$. Точке пересечения присвоим номер *1*. При $\psi = 1$ из (38) получаем, что максимальная скорость истечения V_M меньше критической V_K. Поэтому до точки *1* $\left(0 < \frac{p}{p_0} \le 0{,}1561\right)$ расход равен критическому и далее $\left(0{,}1561 < \frac{p}{p_0} \le 1\right)$ он возрастает до точки *2*, а затем падает до нуля.

Третий режим истечения имеет место, когда $\psi > 1$. Пусть $\psi = 4$, что соответствует (точка *3* на рис. 3). В данном из (38) . Следовательно, до точки *3* расход истечения равен критическому и далее уменьшается до нуля.

Таким образом, применительно к газодинамическим течениям определен новый режим истечения от точки *2* до точки *3* (рис. 3), что ранее не было отражено в известной литературе.

Литература

1. *Бубнов В.А.* Об изменении плотности в гидродинамическом потоке // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2014. № 4 (16). С. 9–19.

2. *Бубнов В.А.* Об уравнениях гидродинамики с переменной плотностью // Седьмые Поляховские чтения: тезисы докладов Междунар. конфер. по механике (Санкт-Петербург, 2–6 февраля 2015 г.). М.: Издатель И.В. Баланов. 2015. С. 86.

3. *Бубнов В.А.* Турбулентные изоэнтропные течения // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71. № 2. С. 330–335.

4. *Бубнов В.А.* Расчет местных сопротивлений в проточной части гидроприводе // Вестник машиностроения. 1989. № 11. С. 17–20.

5. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / пер. с лат. А.Н. Крылова // Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. VII. М.–Л.: АН СССР, 1936. 696 с.

Literatura

1. *Bubnov V.A.* Ob izmenenii plotnosti v gidrodinamicheskom potoke // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2014. № 4 (16). S. 9–19.

2. *Bubnov V.A.* Ob uravneniyax gidrodinamiki s peremennoj plotnost’yu // Sed’my’e Polyaxovskie chteniya: tezisy’ dokladov Mezhdunar. konfer. po mexanike (Sankt-Peterburg, 2–6 fevralya 2015 g.). M.: Izdatel’ I.V. Balanov. 2015. S. 86.

3. *Bubnov V.A.* Turbulentny’e izoe’ntropny’e techeniya // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1998. T. 71. № 2. S. 330–335.

4. *Bubnov V.A.* Raschet mestny’x soprotivlenij v protochnoj chasti gidroprivode // Vestnik mashinostroeniya. 1989. № 11. S. 17–20.

5. *N’yuton I.* Matematicheskie nachala natural’noj filosofii / per. s lat. A.N. Kry’lova // Sobranie trudov akademika A.N. Kry’lova. T. VII. M.–L.: AN SSSR, 1936. 696 s.

V.A. Bubnov

On the Gas-dynamic Flow of an Ideal Gas

In the paper the author carries out the derivation of the equations of gas dynamics on condition when in the process of motion the mass of the particle of liquid changes. On the basis of the derived equations the author proposes solution to the problem of the outflow of gas from the reservoir. New modes of outflow are noted.

Keywords: particles of liquid; Newton equation; ideal gas; Mach number; speed of sound; critical speed and pressure.