**В.А. Бубнов**

# Об уравнении неразрывности в гидродинамике

В статье представлены результаты изучения изменений объема частицы жидкости вследствие деформационного движения. Демонстрируется ряд кинематических соотношений, среди которых общеизвестное уравнение неразрывности. В качестве новых соотношений даются волновое уравнение и уравнение Пуассона.

*Ключевые слова*: частица жидкости; деформационное движение; волновое уравнение; уравнение Пуассона.

Уравнение неразрывности для анализа кинематических свойств жидкости ввёл Леонард Эйлер. Суть рассуждений Эйлера в данном случае воспроизводим по [5].

Обозначим через $W$ объём движущегося элемента жидкости, тогда согласно закону сохранения массы будем иметь:

$$\frac{d(\rho W)}{dt}=0$$

или

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}=0. \qquad (1)$$

Здесь $\rho$ — плотность жидкости, а $\frac{d}{dt}$ — оператор полной производной, впервые введённый Эйлером и равный

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}.$$

В этом операторе через $u, v, w$ обозначены скорости частицы жидкости вдоль осей $x, y, z$ соответственно, а через $t$ — время.

Чтобы вычислить значение $\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}$, рассмотрим элемент, заполняющий в момент $t$ параллелепипед $dxdydz$, вершина $M$ которого лежит в точке $(x, y, z)$, а рёбра $ML$, $MQ$, $MN$ параллельны координатным осям. В момент $t + dt$ рассматриваемый элемент образует косой параллелепипед, и так как скорости частицы $L$ относительно частицы $M$ равны:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx, \frac{\partial v}{\partial x}dx, \frac{\partial w}{\partial x}dx,$$

то по прошествии времени $dt$ проекции ребра $ML$ на координатные оси будут равны

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)dx, \frac{\partial v}{\partial x}dt\,dx, \frac{\partial w}{\partial x}dt\,dx.$$

Пренебрегая членами высшего порядка относительно $dt$, найдём, что длина этого ребра будет равна

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)dx.$$

Аналогично находим и остальные рёбра. Так как углы параллелепипеда только бесконечно мало отличаются от прямых углов, то объём его, если пренебречь членами высшего порядка малости относительно $dt$, выразится произведением трёх рёбер, т. е. получим

$$W+\frac{dW}{dt}dt=\left\{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dt\right\}dx\,dy\,dz.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{2}$$

По терминологии Эйлера соотношение (2) характеризует изменение во времени и в пространстве контрольного объёма жидкости. Теперь из соотношений (1) и (2) находим:

$$\frac{d\rho}{dt}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) называется уравнением неразрывности, и им пользуются по сей день.

Заметим, что в соотношении (2) Эйлер привёл члены и более высокого порядка малости относительно $dt$, на что впервые было обращено внимание в работах профессора В.М. Овсянникова (см., например: [6]).

Однако при выводе соотношения (2) Эйлером не определено начало системы координат, относительно которого движутся частицы жидкости, и не проанализированы виды движений указанной частицы.

Такой анализ проделан нашим соотечественником Н.Е. Жуковским в работе [4].

Действительно, следуя [4], применительно к жидкой частице выбирают начало прямоугольных осей координат $x, y, z$ в какой-нибудь точке $O$ движущейся жидкой массы и обозначают через $u_0$, $v_0$, $w_0$ компоненты относительно этих осей скорости точки $O$, а через $u, v, w$ — подобные компоненты других точек жидкости. Допустим, что $u, v, w$ суть непрерывные функции, которые для точек, весьма близких к $O$, могут быть разложены в ряд Тейлора по $x, y, z$. Это условие непрерывности компонентов скорости позволяет, несмотря на все разнообразие движений жидкости, установить некоторые общие законы движения бесконечно малой ее части, прилегающей к точке *O*. Такую бесконечно малую часть жидкости Н.Е. Жуковский назвал частицей жидкости, а точку жидкости *O*, лежащую внутри частицы, — ее центром.

Разлагая *u, v, w* в ряд Тейлора по бесконечно малым координатам *x, y, z* и отбрасывая бесконечно малые члены выше первого порядка, представим скорости точек частицы жидкости следующими линейными функциями координат:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y + \frac{\partial u}{\partial z}z, \\ v &= v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}x + \frac{\partial v}{\partial y}y + \frac{\partial v}{\partial z}z, \\ w &= w_0 + \frac{\partial w}{\partial x}x + \frac{\partial w}{\partial y}y + \frac{\partial w}{\partial z}z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Преобразуем первую из этих формул:

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)y,$$

и, сделав такие же преобразования с другими, предположим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, \frac{\partial w}{\partial x} = \varepsilon_3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2\theta_1, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\theta_2, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\theta_3,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_x, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\omega_y, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z.$$

Тогда найдем:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \omega_y z - \omega_z y + \frac{\partial F}{\partial x}, \\ v &= v_0 + \omega_z x - \omega_x z + \frac{\partial F}{\partial y}, \\ w &= w_0 + \omega_x y - \omega_y x + \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$F = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy). \tag{6}$$

Формулы (5) впервые были получены Гельмгольцем в 1858 году. Они показывают, что движение частицы жидкости может быть разложено на три движения: поступательное со скоростью ее центра, вращательное относительно оси, проходящей через этот центр, и движение с потенциалом скоростей, при котором центр неподвижен.

Величины $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$, входящие в (5), суть компоненты угловой скорости вращения частицы.

Отбросив поступательное и вращательное движение частицы, исследуем третье ее движение, которое называют деформацией, так как только от него происходит изменение вида частицы. Деформация может быть рассматриваема как движение частицы относительно подвижных осей координат, которые имеют то же поступательное и вращательное движение, что и частица жидкости.

Ради удобства письма подвижные оси координат будут обозначаться теми же символами *x, y, z*, так что скорости деформационного движения выразятся формулами:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x},\frac{dy}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{dz}{dt}=\frac{\partial F}{\partial z}. \tag{7}$$

Формула (6) представляет уравнение центральной поверхности второго порядка.

Из теории поверхностей второго порядка известно, что если за оси координат приняты диаметры, попарно сопряженные, то уравнение поверхности будет содержать только члены с квадратами координат. Такие направления называются главными, а в теории деформационного движения их называют осями деформации.

Известно также, что для перехода от осей *x, y, z* к осям деформации $\xi$, $\eta$, $\zeta$ необходимо равенство нулю следующего определителя третьего порядка, составленного из коэффициентов многочлена (6):

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1-\lambda & \theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & \varepsilon_2-\lambda & \theta_1 \\ \theta_2 & \theta_1 & \varepsilon_3-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

После вычисления определителя в (8) получается кубическое уравнение относительно $\lambda$:

$$\begin{gathered}\lambda^3-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\lambda^2+(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_3-\theta_1^2-\theta_2^2-\theta_3^2)\lambda- \\ -(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+2\theta_1\theta_2\theta_3-\varepsilon_1\theta_1^2-\varepsilon_2\theta_2^2-\varepsilon_3\theta_3^2)=0.\end{gathered} \tag{9}$$

В аналитической геометрии доказывается, что все три корня $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ в уравнении (9) действительны, а уравнение поверхности (6), относительное к главным осям $\xi$, $\eta$, $\zeta$, представляется в виде:

$$F=\frac{1}{2}(\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2). \tag{10}$$

По аналогии с формулами (7) скорости деформационного движения вдоль осей деформации будем определять так:

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \xi},\frac{d\eta}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \eta},\frac{d\zeta}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \zeta}. \tag{11}$$

Поверхность $F$ была названа Н.Е. Жуковским поверхностью расширения.

Если для вычисления скоростей деформационного движения по формулам (11) использовать $F$ в форме (10), то будем иметь:

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi,\frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta,\frac{d\zeta}{dt}=\lambda_3\zeta. \qquad (12)$$

Формулы (12) показывают, что частица жидкости, имеющая форму бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда, стороны которого параллельны осям деформации, остается прямоугольным параллелепипедом и по прошествии времени $dt$. Из этих же формул следует, что задача по нахождению скоростей деформационного движения сводится к проблеме нахождения корней $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ кубического уравнения (9).

Для разрешения указанной проблемы в уравнении (9) введем дополнительные обозначения [1]:

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3, \qquad (13)$$

$$A=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3-(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2), \qquad (14)$$

$$B=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+2\theta_1\theta_2\theta_3-(\varepsilon_1\theta_1^2+\varepsilon_2\theta_2^2+\varepsilon_3\theta_3^2), \qquad (15)$$

после чего оно примет вид:

$$\lambda^3-\varepsilon\lambda^2+A\lambda-B=0. \qquad (16)$$

Так как все три корня в уравнении (16) действительны, то его левую часть можно представить так:

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3). \qquad (17)$$

Представим правую часть в (17) в форме многочлена по степеням $\lambda$ и сравним указанный многочлен с левой частью в (16). В результате чего, после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\lambda$ в (16) и (17), будем иметь соотношения между корнями $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ и характеристиками деформационного движения в такой форме:

$$\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\varepsilon,\\&\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=A,\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3=B.\end{aligned} \qquad (18)$$

Для вычисления коэффициента кубического расширения частицы жидкости предположим, что она имеет форму бесконечного малого шарика, уравнение которого есть

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2 \qquad (19)$$

и определим ее вид по прошествии времени $dt$. На основании уравнений (12) точка жидкой частицы, имеющая координаты $\xi$, $\eta$, $\zeta$, будет по прошествии времени $dt$ иметь координаты:

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\xi+d\xi=\xi(1+\lambda_1dt),\\y_1&=\eta+d\eta=\eta(1+\lambda_2dt),\\z_1&=\zeta+d\zeta=\zeta(1+\lambda_3dt).\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Определив отсюда $\xi$, $\eta$, $\tau$, и подставив их в уравнение сферы (19), получим уравнение эллипсоида:

$$\frac{x_1^2}{a^2(1+\lambda_1 dt)^2}+\frac{y_1^2}{a^2(1+\lambda_2 dt)^2}+\frac{z_1^2}{a^2(1+\lambda_3 dt)^2}=1. \qquad (21)$$

Объем сферы (19) будет

$$V_0=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

а объем эллипсоида (21):

$$V_1=\frac{4}{3}\pi a^3(1+\lambda_1 dt)(1+\lambda_2 dt)(1+\lambda_3 dt).$$

Коэффициентом кубического расширения принято считать следующую величину:

$$\theta=\frac{\Delta V}{V\Delta t}=\frac{V_0-V_1}{V_0\Delta t}, \qquad (22)$$

которая из приведенных формул для $V_0$ и $V$ выражается через характеристики деформационного движения так [8]:

$$\theta=-(\varepsilon+Adt+Bdt^2). \qquad (23)$$

При выводе формулы (23) предполагалось, что $\Delta t = dt$, что позволительно ввиду независимости переменной $t$.

Частица жидкости характеризуется массой $m$ и плотностью $\rho$, через которые объемы $V_0$ и $V$ определяются так:

$$V_0=\frac{m_0}{\rho_0},\, V_1=\frac{m_1}{\rho_1}. \qquad (24)$$

Формулы (24) позволяют рассмотреть три случая изменения коэффициента кубического расширения $\theta$.

Действительно, пусть при деформационном движении масса частицы жидкости не изменяется, т. е. $m_1 = m_0 = m$. Тогда из (22) с учетом (24) получаем:

$$\theta=\frac{\rho_1-\rho_0}{\rho_1\Delta t}=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \qquad (25)$$

Вопреки установившемуся в гидродинамике мнению из приведенных рассуждений не следует, что постоянство плотности частицы жидкости влечет постоянство ее массы во время деформационного движения.

Второй случай движения частицы жидкости, это когда во время движения сохраняется ее плотность, т.е. $\rho_1 = \rho_0 = \rho$. Тогда из (22) и (24) получаем:

$$\theta=\frac{m_0-m_1}{m_0\Delta t}=\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}. \qquad (26)$$

И, наконец, при движении частицы жидкости может оказаться, что $\rho_1 m_0 = \rho_0 m_1$. Тогда из (22) и (23) следует:

$$\theta = 0. \qquad (27)$$

Формулы (25−27) позволяют из (23) получить следующие три соотношения [1], характеризующие процесс объемного расширения частицы жидкости:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+(\varepsilon+Adt+Bdt^2)=0, \tag{28}$$

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}+(\varepsilon+Adt+Bdt^2)=0, \tag{29}$$

$$(\varepsilon+Adt+Bdt^2)=0. \tag{30}$$

Если в выражениях, заключенных в круглые скобки, формул (28−30) положить $dt = 0$, то будем иметь:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\varepsilon=0, \tag{31}$$

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}+\varepsilon=0, \tag{32}$$

$$\varepsilon=0. \tag{33}$$

С учетом формулы (13) и приведенных ранее выражений для $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ соотношения (31–33) через скорости деформационного движения переписываются так:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{34}$$

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{36}$$

Соотношение (36) известно в гидродинамике как уравнение неразрывности при движении несжимаемой жидкости. Его получают из (34), полагая в последнем $\rho = const$.

Заметим, что кинематические соотношения (28−30) имеют место и тогда, когда в качестве первоначального объёма частицы принимается элементарный куб.

Формулы (28–30) устанавливают связь между коэффициентом кубического расширения $\theta$ и кинематическими характеристиками частицы жидкости $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, для вычисления которых необходимо знать скорости деформационного движения *u, v, w* как функции координат *x, y, z,* используемых при написании разложений (4).

Следует заметить, что выражения для коэффициента $\theta$ в формах (28−30) получены для произвольных значений $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ корней кубического уравнения (9). Очевидно, что при поиске конкретных значений указанных корней между кинематическими характеристиками частицы жидкости возникнут определенные соотношения, которые и могут быть использованы для определения поля скоростей деформационного движения.

Действительно, Н.Е. Жуковский в [4] разыскивал корни уравнения (9) при условии, что

$$\theta_1=\theta_2=\theta_3=0. \tag{37}$$

В этом случае соотношения (18) между корнями $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ и характеристиками деформационного движения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\\&\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3,\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

Из соотношений (38) очевидны значения корней уравнения (9):

$$\lambda_1=\varepsilon_1,\lambda_2=\varepsilon_2,\lambda_3=\varepsilon_3.\qquad(39)$$

Условия (37) позволяют поверхность расширения (6) переписать так:

$$F=\frac{1}{2}(\varepsilon_1x^2+\varepsilon_2y^2\varepsilon_3z^2),\qquad(40)$$

которая в рамках ограничений (37) совпадает с уравнением той же поверхности, отнесенным к главным осям $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Последнее означает, что любая прямоугольная система координат $x$, $y$, $z$ совпадает с осями деформации, если выполняются ограничения (37).

Ранее показано, что выражения для $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ в раскрытом виде таковы:

$$\theta_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),\theta_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\theta_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).\qquad(41)$$

Следовательно, ограничения (37) позволяют установить три дифференциальных уравнения в частных производных для определения скоростей $u$, $v$, $w$:

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.\qquad(42)$$

Известно, что величины $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ определяют три скольжения без вращения, направления которых суть координатные линии $oy$, $oz$, $ox$, а оси скольжения — координатные линии $ox$, $oy$, $oz$. Поэтому условия (42) означают, что в данном случае частица жидкости только удлиняется по направлению координат на величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, $\varepsilon_3$. В [3] показано, что соотношения (42) обращают в нуль вязкие касательные напряжения.

Кинематическое соотношение (31) в гидродинамике рассматривается в качестве уравнения неразрывности сжимаемой жидкости. Оно получается из условия (25), в котором изменение в единицу времени коэффициента кубического расширения $\theta$ отождествляется с изменением плотности $\rho$ в течение того же промежутка времени.

Вопрос о правомерности такого обсуждения впервые обсуждался в [2]. Действительно, частица жидкости, согласно молекулярно-кинетическим представлениям вещества, состоит из молекул, находящихся в тепловом движении. Это тепловое движение описывается уравнением состояния вещества, в которое входят давление, температура и удельный объём. Из уравнения состояния можно выразить плотность как функцию от давления и температуры. Кроме того, частица жидкости как единое целое участвует в деформационном движении, которое накладывается на указанное тепловое движение молекул.

Если деформационное движение не влияет на тепловое движение, т. е. два этих движения сосуществуют независимо друг от друга, то отпадает необходимость в соотношении (25), так как из уравнения состояния плотность можно выразить через давление и температуру гидродинамического потока.

Отметим, что случай независимого сосуществования указанных движений имеет место в потоках жидкости, лишённой трения, и в ламинарных течениях.

Экспериментально доказано, что в турбулентных течениях принцип сосуществования данных движений нарушается и возникают пульсации плотности и давления. В таких течениях формула (25) и уравнение неразрывности (31) могут иметь место.

Чтобы обойти спорный вопрос относительно корректности соотношения (25) введём безразмерный коэффициент $k$ кубического расширения жидкости, и величину $\theta$ определим так:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta t} = \frac{k}{\Delta t} = \frac{\partial k}{\partial t}, \tag{43}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial t}$ — локальная производная по времени. Теперь уравнение (23) с учётом (43) переписываем так:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -(\varepsilon + Adt + Bdt^2). \tag{44}$$

Пусть в (44) $dt \to 0$, тогда это соотношение принимает более простой вид, а именно:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + div\vec{V} = 0. \tag{45}$$

Введём новый вектор $\vec{q}$ как

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = \vec{V}, \tag{46}$$

где $\vec{V}$ — вектор гидродинамической скорости, составляющие которого выражаются через составляющие вектора $\vec{q}$ следующим образом:

$$u = \frac{\partial q_x}{\partial t}, u = \frac{\partial q_y}{\partial t}, u = \frac{\partial q_z}{\partial t}. \tag{47}$$

Возьмём операцию дивергенции от обеих частей соотношения (46), после чего с учётом (45) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(div\vec{q} + k) = 0.$$

В этом равенстве приравниваем к нулю выражение в скобках и к полученному соотношению добавляем уравнение (46). В результате чего заключаем, что соотношение (45) эквивалентно двум следующим равенствам:

$$div\vec{q} + k = 0, \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = \vec{V}. \tag{48}$$

Для перехода к стационарным течениям, т. е. когда вектор $\vec{V}$ зависит только от координат, полагаем, что:

$$q_x = t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, q_x = t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, q_x = t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, k = t \cdot k_0(x, y, z).$$

После этого первое уравнение в (48) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -k_0(x, y, z). \tag{49}$$

Здесь функция $\varphi(x, y, z)$ представляет потенциал скоростей, так как в данном случае из (47) следует:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Уравнение (49) по форме совпадает с известным уравнением Пуассона с той лишь разницей, что в отличие от уравнения Пуассона правая часть в (49) суть функция координат. Обычно в гидродинамике потенциальные течения изучаются на основе уравнения Лапласа, в которое переходит соотношение (49) при $k_0 = 0$.

Таким образом, уравнение (49) расширяет класс потенциальных гидродинамических течений, разновидности которого определяются характером функции $k_0$ $(x, y, z)$. Для изучения нестационарных течений на базе уравнений (48) введём функцию $\Psi(x, y, z, t)$ таким образом:

$$q_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, q_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, q_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Эти значения $q_x$, $q_y$, $q_z$ подставляем в первое уравнение (48) и получаем:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -k(x, y, z, t).$$

Далее выразим коэффициент кубического расширения $k$ через функцию $\Psi$ следующим образом:

$$k = -\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

после чего последнее соотношение примет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = g^2\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right), \tag{50}$$

где величина $g$ имеет размерность скорости. Это уравнение (50) описывает волновые движения. Оно используется в акустике и электродинамике.

Рассмотрим ещё один класс потенциальных течений, когда промежуток времени $dt = \Delta t$ суть величина конечная. Для этого предположим $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, а $\frac{\partial k}{\partial t} = -f(x, y, z)$. При этих предположениях уравнение (44) переписывается так:

$$\varepsilon + A \cdot \Delta t + B \cdot \Delta t^2 = f(x, y, z), \tag{51}$$

где из формул (14) и (15) получаем:

$$A = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3, B = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \tag{52}$$

Как и ранее, вводим потенциал скоростей $\varphi(x, y, z, t)$, после чего уравнение (51) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)\Delta t +$$

$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\cdot\Delta t^2 = f(x, y, z).$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда по степеням $\Delta t$, а именно:

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot \Delta t + \varphi_2 \cdot \Delta t^2 + ...$

Тогда, например, для $\varphi_0$ получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = f(x, y, z). \tag{53}$$

Уравнение (53) по форме совпадает с уравнением (75) и является обобщённым уравнением Пуассона.

Таким образом, кинематическое соотношение (44) существенно расширяет характер гидродинамических течений.

### Литература

1. *Бубнов В.А.* О деформационных движениях частицы жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2008. № 1 (20). С. 71–77.

2. *Бубнов В.А.* Кинематические соотношения частицы жидкости при ее деформационном движении // Физическое образование в вузах. 2012. Т. 18. № 3. С. 111–119.

3. *Бубнов В.А.* О влиянии вязких нормальных напряжений на характер распределения механической энергии в гидродинамических потоках // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2013. № 2 (12). С. 9–15.

4. *Жуковский Н.Е.* Кинематика жидкого тела; Гидродинамика // Жуковский Н.Е. Полн. собр. соч. / ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского; комитет по увековечению памяти Н.Е. Жуковского; ред. коллегия: С.А. Чаплыгин, А.Н. Некрасов, В.А. Архангельский и др. Т. II. М. – Л.: ОНТИ СССР, 1935. 357 с.

5. *Ламб Г.* Гидродинамика / Пер. с англ. А.В. Гермогенова, В.А. Кудрявцева; под ред. Н.А. Слезкина. М. – Л.: ОГИЗ изд. тех.-теор. лит., 1947. 928 с.

6. *Овсянников В.М.* Конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике: сб. ст. № 22. М.: Спутник, 2011. 152 с.

### Literatura

1. *Bubnov V.A.* O deformacionny'x dvizheniyax chasticzy' zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2008. № 1 (20). S. 71–77.

2. *Bubnov V.A.* Kinematicheskie sootnosheniya chasticzy' zhidkosti pri ee deformacionnom dvizhenii // Fizicheskoe obrazovanie v vuzax. 2012. T. 18. № 3. S. 111–119.

3. *Bubnov V.A.* O vliyanii vyazkix normal'ny'x napryazhenij na xarakter raspredeleniya mexanicheskoj e'nergii v gidrodinamicheskix potokax // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2013. № 2 (12). S. 9–15.

4. *Zhukovskij N.E.* Kinematika zhidkogo tela; Gidrodinamika // Zhukovskij N.E. Poln. sobr. soch. / CzAGI im. N.E. Zhukovskogo; komitet po uvekovecheniyu pamyati N.E. Zhukovskogo; red. kollegiya: S.A. Chaply'gin, A.N. Nekrasov, V.A. Arxangel'skij i dr. T. II. M. – L.: ONTI SSSR, 1935. 357 s.

5. *Lamb G.* Gidrodinamika / Per. s angl. A.V. Germogenova, V.A. Kudryavceva; pod red. N.A. Slezkina. M. – L.: OGIZ izd. tex.-teor. lit., 1947. 928 s.

6. *Ovsyannikov V.M.* Konechno-raznostnoe uravnenie nerazry'vnosti Leonarda E'jlera. Problemy' aksiomatiki v gidrogazodinamike: sb. st. № 22. M.: Sputnik, 2011. 152 s.

*V.A. Bubnov*

## On the Equation of Continuity in Hydrodynamics

The article presents the results of a study of changes in volume of a fluid particle due to deformation motion. The author shows a number of kinematic relations, including the well-known equation of continuity. As the new relations the wave equation and the Poisson equation are given.

*Keywords:* fluid particle; deformation motion; wave equation; Poisson equation.