ФИЗИКА

В.А. Бубнов

Об аналогии между звуковыми и электромагнитными волнами

Получено новое уравнение акустики, основанное на уравнениях гидродинамики идеальной жидкости, учитывающих переменность массы частицы жидкости, и уравнении неразрывности, в котором имеет место скошение координатных углов частицы. Проанализированы условия инвариантности этого уравнения относительно преобразований Лоренца. Установлена определенная аналогия между звуковыми и электромагнитными волнами.

Ключевые слова: гидродинамическая скорость звука, света; волна: звуковая, электромагнитная; инвариантность; преобразования Лоренца.

Известно, что второй закон движения материальной точки И. Ньютон сформулировал следующим образом: изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует (см. [10: с. 40]).

В рамках такого определения формульный вид рассматриваемого закона можно представить так:

$$C\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \vec{F}. \qquad (1)$$

Здесь введён коэффициент пропорциональности C, который, с одной стороны, может приводить к одинаковой размерности правой и левой частей в (1), а с другой стороны, при общепринятых размерностях величин, входящих в (1), может быть отвлечённым числом.

В работах автора [1–4] уравнение (1) использовалось для вывода уравнений гидродинамики, в которых масса частицы жидкости суть переменная величина.

Действительно, введем плотность ρ жидкости как отношение массы m частицы к единице объёма W частицы жидкости, а также поверхностную силу

$$\vec{P} = \vec{i}\cdot\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial\sigma_z}{\partial z},$$

отнесённую к единице объёма, тогда уравнение (1) примет вид:

$$C\rho\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{C\vec{V}}{W}\cdot\frac{dm}{dt} = \vec{P}. \qquad (2)$$

Отметим, что в выражении для поверхностной силы $\vec{P}$ через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ обозначены орты координатных осей x, y, z, соответственно, а через σ_x, σ_y, σ_z — нормальные напряжения.

Следуя [1–2], изменение массы вычислим через изменение объёма W и плотности ρ так:

$$\frac{dm}{dt} = \rho\frac{dW}{dt} + W\frac{d\rho}{dt}. \tag{3}$$

Теперь изменение объёма W выражаем через скорость объёмного расширения Θ следующим образом:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{(W_0 - W)W_0}{W_0 \cdot \Delta t} = -W_0 \cdot \Theta, \tag{4}$$

где для Θ будем использовать общепринятые соотношения

$$\Theta = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \Delta t} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \tag{5}$$

Кроме того, воспользуемся общепринятым уравнением неразрывности:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + div\vec{V} = 0. \tag{6}$$

Соотношения (4)–(5) позволяют уравнение (3) переписать так:

$$\frac{dm}{dt} = \rho\Theta(W - W_0). \tag{7}$$

Введём эмпирический параметр

$$C_1 = C\left(1 - \frac{W_0}{W}\right), \tag{8}$$

характеризующий величину изменения объёма частицы жидкости. После чего с учётом формул (7)–(8) уравнение (2) примет вид:

$$C\rho\frac{d\vec{V}}{dt} + C_1\rho\vec{V}\cdot\Theta = \vec{P}. \tag{9}$$

Из (5) и (6) принимаем:

$$\Theta = -div\vec{V},$$

что позволяет уравнению (9) придать новую форму:

$$C\rho\frac{d\vec{V}}{dt} - C_1\rho\vec{V}\,div\vec{V} = \vec{P}. \tag{10}$$

Учитывая тот факт, что частица жидкости в рамках уравнения (10) участвует в деформационном движении, будем под вектором $\vec{V}$ подразумевать гидродинамическую скорость, составляющие которой u, v, w соответственно. Кроме того, оператор полной производной в (10) будем использовать в общеизвестном виде:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

состоящем из локальной производной $\frac{\partial}{\partial t}$ и конвективной $u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$.

В проекциях на координатные оси векторное уравнение (10) представит следующую систему уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned} &C\rho\frac{du}{dt} - C_1\rho u\, div\vec{V} = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x},\\ &C\rho\frac{dv}{dt} - C_1\rho v\, div\vec{V} = \frac{\partial\sigma_y}{\partial y},\\ &C\rho\frac{dw}{dt} - C_1\rho w\, div\vec{V} = \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В дальнейшем для анализа газодинамических течений воспользуемся случаем, когда $C_1 = 0$, что свидетельствует о неизменности объёма W частицы жидкости в процессе её движения. Кроме того, нормальные напряжения отождествим с гидростатическим давлением p, т. е. будем считать, что $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$. Теперь система уравнений (11) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &C\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ &C\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ &C\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

При построении уравнения, описывающего процесс распространения звуковых волн, обычно пренебрегают конвективными членами в левой части системы (12). В таком случае вместо указанной системы будем иметь:

$$C\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\;\; C\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\;\; C\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{13}$$

В уравнениях (13) присутствует неизвестная величина ρ, которая зависит от скоростей деформационного движения. Традиционно данную зависимость определяют через уравнение (6).

Однако в работах автора [5–8] показано, что уравнение неразрывности в форме (6) получено из анализа деформационного движения частицы жидкости только при учете параметров

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\;\; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y},\;\; \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{14}$$

определяющих линейное расширение частицы вдоль осей координат x, y, z соответственно. Наряду с линейным расширением частицы в результате деформационного движения происходит скошение координатных углов в первоначально принятой системе координат, начало которой находится в центре частицы жидкости. Это скошение измеряется параметрами θ_1, θ_2, θ_3, которые определяются так:

$$2\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \; 2\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \; 2\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (15)$$

Согласно работам [5–8] уравнение неразрывности, учитывающее характеристики деформационного движения (14) и (15), имеет вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + (\varepsilon + Adt + Bdt^2) = 0, \qquad (16)$$

где дополнительно обозначено:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \qquad (17)$$

$$A = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2), \qquad (18)$$

$$B = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\theta_1\theta_2\theta_3 - (\varepsilon_1\theta_1^2 + \varepsilon_2\theta_2^2 + \varepsilon_3\theta_3^2). \qquad (19)$$

Кроме того, дифференциал dt определяет промежуток времени, в течение которого первоначальная форма частицы видоизменяется. В дальнейшем будем считать $dt = \Delta t$, а величину Δt трактовать в качестве дополнительного параметра деформационного движения.

В связи с уравнением неразрывности в форме (16) уместно заметить, что, согласно известной гипотезе Стокса, касательные напряжения τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}, действующие на частицу жидкости, определяются так:

$$\tau_{xy} = 2\,\mu\,\theta_3, \tau_{yz} = 2\,\mu\,\theta_1, \tau_{xz} = 2\,\mu\,\theta_2, \qquad (20)$$

где μ — коэффициент вязкости.

Отсюда следует, что скошение координатных углов есть следствие действия касательных напряжений на частицу жидкости.

В дальнейших расчетах в качестве уравнения неразрывности будем использовать соотношение

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -(\varepsilon + A \cdot \Delta t), \qquad (21)$$

которое получается из (16), если в последнем пренебречь членами порядка dt^2.

Теперь уравнения (13) и соотношение (21) будут исходными при получении волнового уравнения.

Вывод волнового уравнения начнем со следующего преобразования правой части в первом соотношении (13), а именно,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Теперь рассматриваемое соотношение перепишем так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{C}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\rho}{\rho_0} = -g^2\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\rho}{\rho_0},$$

где через

$$g=\sqrt{\frac{1}{C}\frac{\partial p}{\partial \rho}}=\sqrt{\alpha\frac{\partial p}{\partial \rho}} \tag{22}$$

обозначена скорость звука.

Изложенное преобразование позволяет уравнениям (13) придать следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g^2\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\rho}{\rho_0},\ \ \frac{\partial v}{\partial t}=-g^2\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{\rho}{\rho_0},\ \ \frac{\partial w}{\partial t}=-g^2\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Интегралы этих уравнений имеют вид:

$$u=-\frac{\partial}{\partial x}\int g^2\ln\frac{\rho}{\rho_0}dt,\ \ v=-\frac{\partial}{\partial y}\int g^2\ln\frac{\rho}{\rho_0}dt,\ \ w=-\frac{\partial}{\partial z}\int g^2\ln\frac{\rho}{\rho_0}dt,$$

Введем дополнительную функцию $\Psi=\int g^2\ln\frac{\rho}{\rho_0}dt,$ тогда для скоростей будем иметь окончательные формулы:

$$u=-\frac{\partial\Psi}{\partial x},\ \ v=-\frac{\partial\Psi}{\partial y},\ \ w=-\frac{\partial\Psi}{\partial z}. \tag{23}$$

Продифференцируем дважды по t введенную функцию Ψ, тогда получим:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{g^2}{\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

откуда будем иметь:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (21), получаем следующее соотношение, определяющее функцию Ψ через кинематические характеристики деформационного движения:

$$\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-(\varepsilon+A\cdot\Delta t). \tag{25}$$

Правую часть в (25) перепишем, используя формулы (14)–(15), (17)–(18), (23). После этого будем иметь следующий окончательный вид уравнения, описывающего процесс распространения звуковых волн:

$$\begin{aligned}\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}&=\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)-\\&-\Delta t\cdot\left\{\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)-\right.\\&\left.-\left[\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}\right)^2\right]\right\}.\end{aligned} \tag{26}$$

Для определения скорости звука g, входящей в уравнение (26) параметром, вернемся к формуле (22) и будем вычислять величину $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ для газовых сред, находящихся в равновесных состояниях. Пусть термодинамический процесс происходит при постоянной температуре. Тогда на основании закона Бойля – Мариотта имеем

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \text{ или } p = \left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)\rho,$$

где p_0 и ρ_0 — термодинамические параметры, характеризующие начальное равновесное состояние газа. Дифференцируем по переменной ρ второе из вышенаписанных соотношений и результат подставляем в (22), после чего получаем:

$$g = \sqrt{\alpha \frac{p_0}{\rho_0}}. \tag{27}$$

Эта формула для g при $\alpha = 1$ переходит в ньютоновскую формулу для скорости звука.

Пусть в рассматриваемой газовой среде давление адиабатически изменяется по закону Пуассона $p = \rho^\gamma$, где γ — отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Формула Пуассона позволяет представить изменения давления в окрестности параметров p_0, ρ_0 в виде ряда Тейлора. Ограничимся первым членом такого разложения, а именно:

$$p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \cdot (\rho - \rho_0) = \gamma\, \rho_0^{\gamma-1} \cdot (\rho - \rho_0) = \gamma \left(\frac{p_0}{\rho_0}\right) \cdot (\rho - \rho_0).$$

Отсюда получаем:

$$\frac{p - p_0}{\rho - \rho_0} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Данное значение $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ подставляется в (22) и получаем новую формулу для скорости звука

$$g = \sqrt{\alpha\gamma\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)}. \tag{28}$$

При $\alpha = 1$ формула (28) переходит в известную формулу Лапласа.

Из изложенного становится очевидным, что для определения величины скорости звука g надо уметь вычислять производную $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ и определять параметр $\alpha = \frac{1}{C}$.

Относительно параметра α следует заметить следующее. При вычислении величины $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ учитывались условия термодинамически равновесного перехода от состояния системы, характеризующейся давлением p_0 и плотностью ρ_0, к состоянию, характеризующемуся давлением p и плотностью ρ. Известно, что указанный переход происходит медленно. В случае же движения звуковой волны имеет место неравновесный термодинамический процесс, в котором изменения давления и плотности происходят довольно быстро и зависят от частоты звуковых колебаний.

Возможно, что параметр α в формулах (27)–(28) корректирует величину скорости звука на неравновесность термодинамического процесса и зависит от частоты акустических колебаний.

Изучать свойства акустического уравнения (26) начнем со случая, когда промежуток времени Δt, в течение которого видоизменяется форма частицы жидкости, бесконечно мал и членами в фигурных скобках, в правой части (26), можно пренебречь. Тогда получаем классическое волновое уравнение:

$$\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right). \qquad (29)$$

На предмет инвариантности относительно известных преобразований Лоренца это уравнение впервые исследовалось в [12].

Отметим, что задача по разысканию преобразований Лоренца следующим образом поставлена в [12]. Пусть в пространстве имеется два мира, явления природы в которых описываются двумя координатными системами: x_1, x_2, x_3, t и x_1', x_2', x_3', t'. Необходимо найти преобразования перехода от одной системы координат к другой, которые оставляют инвариативными уравнения, описывающие одно и то же явление в разных координатных пространствах. Из всех явлений природы Умов выбирает волнообразное движение ввиду его всеобщности.

Допустим, что рассматриваемое явление характеризуется некоторой функцией ψ, которая выражена в первый раз в x_1, x_2, x_3, t, во второй раз — в x_1', x_2', x_3', t', в двух физически изотропных и эквивалентных мирах должна удовлетворять одним и тем же по форме дифференциальным уравнениям следующего вида:

$$\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}, \qquad (30)$$

$$\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i'^2}. \qquad (31)$$

Здесь g означает постоянную скорость распространения волн в обоих мирах. Примем также, что x_i представляют прямоугольные пространственные координаты, а относительно координат x_i' не делается наперед никаких ограничений.

Обозначим через u одну из переменных пространства и времени первого мира и вообразим, что функция ψ выражена в переменных второго мира. Тогда будем иметь следующие формулы перехода от одной системы координат к другой.

$$\frac{\partial}{\partial u}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i'}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_i'}+\frac{\partial t'}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t'}, \tag{32}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial u^2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 x_i'}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x_i'}+\frac{\partial^2 t'}{\partial^2 u^2}\frac{\partial}{\partial t'}+\\+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i'}{\partial u}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\left(\frac{\partial t'}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+2\frac{\partial x_1'}{\partial u}\frac{\partial x_2'}{\partial u}\frac{\partial^2}{\partial x_1'\partial x_2'}+\\+2\frac{\partial x_1'}{\partial u}\frac{\partial x_3'}{\partial u}\frac{\partial^2}{\partial x_1'\partial x_3'}+2\frac{\partial x_1'}{\partial u}\frac{\partial t'}{\partial u}\frac{\partial^2}{\partial x_1'\partial t'}+\\+2\frac{\partial x_2'}{\partial u}\frac{\partial x_3'}{\partial u}\frac{\partial^2}{\partial x_2'\partial x_3'}+2\frac{\partial x_2'}{\partial u}\frac{\partial t'}{\partial u}\frac{\partial^2}{\partial x_2'\partial t'}+2\frac{\partial x_3'}{\partial u}\frac{\partial t'}{\partial u}\frac{\partial^2}{\partial x_3'\partial t'}.\end{gathered} \tag{33}$$

Принимаем эти соотношения последовательно и с помощью формул (32) и (33) производим переход в (30) к штрихованной системе координат. В результате чего вместо (30) получим:

$$B\frac{\partial^2}{\partial t'^2}=A\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i'^2}, \tag{34}$$

где дополнительно обозначено:

$$\begin{gathered}A=g^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial x_1'}{\partial t}\right)^2=g^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_2'}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial x_2'}{\partial t}\right)^2=\\=g^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_3'}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial x_3'}{\partial t}\right)^2,\end{gathered} \tag{35}$$

$$B=\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2-g^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial t'}{\partial x_i}\right)^2. \tag{36}$$

Кроме того, должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 x_i'}{\partial t^2}=g^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 x_i'}{\partial x_j^2},\ i=1,2,3; \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 t'}{\partial t^2}=g^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 t'}{\partial x_j^2};$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial x_1'}{\partial t}\frac{\partial x_2'}{\partial t}=g^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_1'}{\partial x_j}\frac{\partial x_2'}{\partial x_j},\\\frac{\partial x_1'}{\partial t}\frac{\partial x_3'}{\partial t}=g^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_1'}{\partial x_j}\frac{\partial x_3'}{\partial x_j},\\\frac{\partial x_2'}{\partial t}\frac{\partial x_3'}{\partial t}=g^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_2'}{\partial x_j}\frac{\partial x_3'}{\partial x_j};\end{gathered} \tag{38}$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial t} = g^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\frac{\partial t'}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3. \qquad (39)$$

Чтобы уравнение (34) перешло в (31), необходимо положить

$$A = g^2 B. \qquad (40)$$

Рассмотрим простейший случай, когда одна пространственная координата x_1' зависит от времени t, а временная координата t' зависит только от x_1, т. е.

$$x_1' = x_1'(t),\ t' = t'(x_1). \qquad (41)$$

Тогда очевидны соотношения

$$\frac{\partial x_2'}{\partial t} = 0, \frac{\partial x_3'}{\partial t} = 0, \frac{\partial t'}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial t'}{\partial x_3} = 0. \qquad (42)$$

Необходимо ввести условия, определяющие взаимное отношение переменных x_i', t' и x_i, t ($i = 1, 2, 3$). Пусть эти отношения даются указанием, что

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \neq 0, \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} \neq 0, \frac{\partial x_3'}{\partial x_3} \neq 0, \frac{\partial t'}{\partial t} \neq 0. \qquad (43)$$

Условия (42)–(43) позволяют переписать уравнения (39) в следующем виде:

$$\frac{\partial x_1'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial t} = g^2\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial t'}{\partial x_1}, \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}\frac{\partial t'}{\partial x_x} = 0, \frac{\partial x_3'}{\partial x_1}\frac{\partial t'}{\partial x_1} = 0. \qquad (44)$$

Так как $\frac{\partial t'}{\partial x_1} \neq 0$, то из (44) следует:

$$\frac{\partial x_2'}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial x_3'}{\partial x_1} = 0. \qquad (45)$$

С учетом условий (42) и (45) уравнения (38) упрощаются так:

$$\begin{gathered}\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2} + \frac{\partial x_1'}{\partial x_3}\frac{\partial x_2'}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{\partial x_3'}{\partial x_2} + \frac{\partial x_1'}{\partial x_3}\frac{\partial x_3'}{\partial x_3} = 0,\\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{\partial x_3'}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2'}{\partial x_3}\frac{\partial x_3'}{\partial x_3} = 0.\end{gathered} \qquad (46)$$

Исключаем из (46) $\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial x_3'}{\partial x_3}$, которые согласно (43) отличны от нуля, и получаем соотношение

$$\left[\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_3}\right)^2\right]\frac{\partial x_2'}{\partial x_3}\frac{\partial x_3'}{\partial x_2} = 0. \qquad (47)$$

Это уравнение может быть удовлетворено трояким способом. Для конечного результата безразлично, какой из трех множителей уравнения (47) приравнивается к нулю. Принимаем

$$\frac{\partial x_2'}{\partial x_3} = 0, \qquad (48)$$

после чего из (46) получаем:

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}=0,\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{\partial x_3'}{\partial x_2}=0,\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{\partial x_3'}{\partial x_2}+\frac{\partial x_1'}{\partial x_3}\frac{\partial x_3'}{\partial x_3}=0. \tag{49}$$

Условия (43) позволяют уравнения (49) упростить до соотношений

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}=0,\frac{\partial x_3'}{\partial x_2}=0,\frac{\partial x_1'}{\partial x_3}=0. \tag{50}$$

Из (50), (48), (45), (42) приходим к заключению, что

$$x_1'=f_2(t,x_1), x_2'=f_2(x_2), x_3=f_3(x_3), t'=f_4(t,x_1). \tag{51}$$

Уравнения (35), (36), (40) с учетом (51) принимают теперь вид:

$$\begin{gathered}g^2\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial x_1'}{\partial t}\right)^2=g^2\left(\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\right)^2=g^2\left(\frac{\partial x_3'}{\partial x_3}\right)^2=\\=g^2\left[\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2-g^2\left(\frac{\partial t'}{\partial x_1}\right)^2\right].\end{gathered} \tag{52}$$

Теперь остались невостребованными только уравнения (37), которые применительно к ограничениям (51) упрощаются так:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 x_1'}{\partial t^2}=g^2\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 x_2'}{\partial x_2^2}=0,\frac{\partial^2 x_3'}{\partial x_3^2}=0,\\\frac{\partial^2 t'}{\partial t^2}=g^2\frac{\partial^2 t'}{\partial x_1^2}.\end{gathered} \tag{53}$$

Из двух соотношений в (53) получаем:

$$x_2'=\gamma x_2, x_3'=\gamma x_3, \tag{54}$$

где γ — константа. После подстановки (54) в (52) получим два уравнения:

$$g^2\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial x_1'}{\partial t}\right)^2=g^2\gamma^2,\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2-g^2\left(\frac{\partial t'}{\partial x_1}\right)^2=\gamma^2. \tag{55}$$

Дифференцируем первое из двух уравнений сперва по x_1, а затем по t и принимаем во внимание первое уравнение в (53), после чего будем иметь

$$\left.\begin{aligned}&g^2\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2}-\frac{\partial x_1'}{\partial t}\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1\partial t}=0,\\&\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1'}{\partial t\partial x_1}-\frac{\partial x_1'}{\partial t}\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2}=0.\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Помножим последние из этих уравнений на $\dfrac{\partial x_1'}{\partial t}$, а первое — на $\dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1}$ и сложим. Эти действия позволяют из (56) получить одно уравнение

$$g^2\left[\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial x_1'}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2}=0. \tag{57}$$

Так как первый множитель в (57) не равен нулю, то принимая во внимание первое из уравнений (53) и (56), получаем:

$$\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2}=0, \frac{\partial^2 x_1'}{\partial t^2}=0, \frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1 \partial t}=0. \tag{58}$$

Произведем аналогичные действия со вторым уравнением (55), в результате чего получим соотношения:

$$\frac{\partial^2 t'}{\partial x_1^2}=0, \frac{\partial^2 t'}{\partial t^2}=0, \frac{\partial^2 t'}{\partial t \partial x_1}=0. \tag{59}$$

Интегралы уравнений (58) и (59) имеют вид:

$$x_1' = \alpha\,(x_1 - vt),\ t' = \alpha_1 t + \alpha_2 x_1, \tag{60}$$

где α, v, α_1, α_2 представляют постоянные. После подстановки (60) в первое уравнение (44) получим:

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_1 v}{g^2}. \tag{61}$$

Полученные решения (60) и (61) вводим в уравнения (55). Откуда будем иметь

$$\alpha_1 = \alpha,\ \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{g^2}}}. \tag{62}$$

Собираем вместе формулы (54), (60), (62):

$$x_1' = \frac{\gamma(x_1 - vt)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{g^2}}}, x_2' = \gamma x_2, x_3' = \gamma x_3, t' = \frac{\gamma\left(t - \frac{vx_1}{g^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{g^2}}}. \tag{63}$$

Формулы (63) получены в [12] и в случае, когда переходят в известные преобразования Лоренца.

Особый интерес представляет соотношение (62), в котором параметр γ можно отождествить с массой m_0 частицей жидкости в первоначальный момент времени, а параметр α отождествить с массой m частицы в следующий момент. Тогда соотношение (62) примет вид:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{g^2}}}, \tag{64}$$

в котором под скоростью v будем подразумевать скорость распространения звуковой волны.

Соотношение (62), равно как и соотношение (64), представляет кинематическую сущность волнового уравнения (29), определяющую характер решений данного уравнения. В то же самое время соотношение (64) указывает на то, что при стремлении скорости v распространения волны к скорости звука g масса частицы жидкости увеличивается до бесконечности, что влечет соответствующее увеличение плотности ρ. Увеличение плотности означает возникновение ударной звуковой волны, переход через которую вызовет превышение скорости v над скоростью звука g.

Очевидно, что в рамках уравнения (29) не может существовать решений, определяющих процесс распространения волны со сверхзвуковой скоростью v. Такие решения надо искать в рамках уравнения (25).

Для изучения электромагнитных волн рассмотрим полную систему уравнений Максвелла:

$$\left.\begin{array}{l} rot\,\vec{H} = \dfrac{1}{C}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{C}\vec{j};\, rot\,\vec{E} = -\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ div\,\vec{B} = 0;\, div\,\vec{D} = 4\pi\rho. \end{array}\right\} \qquad (65)$$

Здесь векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ определяют напряженность электрического и магнитного полей, векторы $\vec{D}$ и $\vec{B}$ характеризуют электрическую и магнитную индукцию, а через j обозначена объемная плотность токов проводимости, кроме того, C суть скорость света в пустоте.

К этим уравнениям следует присоединить так называемые материальные уравнения поля

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E},\ \vec{B} = \mu\,\vec{H},\ \vec{j} = \sigma\,\vec{E},$$

где ε — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, σ — проводимость среды.

Для электромагнитных процессов в пустоте уравнения Максвелла упрощаются так:

$$rot\,\vec{H} = \frac{1}{C}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t};\, rot\,\vec{E} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \qquad (66)$$

Формально уравнения (66) не инвариантны относительно преобразований Лоренца, но чтобы сделать их инвариантными в [13] для составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ определены некоторые ограничения в штрихованной системе координат, которым дано определенное толкование.

Однако в [11] для составляющих Ex, Ey, Ez и Hx, Hy, Hz (x, y, z — оси прямоугольной системы координат) получена следующая одна и та же формула уравнений

$$\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{C^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \qquad (67)$$

в которой $g^2 = \dfrac{C^2}{\varepsilon\mu}$, суть одна из указанных составляющих.

Если среда непроводящая ($\sigma = 0$), то уравнение (67) переходит в уравнение

$$\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

которое по форме совпадает с уравнением (29) и которое инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Применительно к явлениям, имеющим место в электромагнитной волне, формула (64) определяет изменение массы заряженной частицы в зависимости от скорости v распространения электромагнитной волны.

В работе [9] представлены результаты обработки опытов ряда авторов по движению β-частиц в электромагнитном поле, из которых следует, что при приближении скорости v к скорости света g расчеты по формуле (64) противоречат опытным данным.

Литература

1. *Бубнов В.А.* Об изменении плотности в гидродинамическом потоке // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2014. № 4 (16). С. 9–19.

2. *Бубнов В.А.* Об уравнениях гидродинамики с переменной плотностью // Седьмые Поляховские чтения: тезисы докладов Международной конференции по механике (Санкт-Петербург, 2–6 февраля 2015 г.) М.: Издатель И.В. Баланов, 2015. 86 с.

3. *Бубнов В.А.* Об уточнении уравнений гидродинамики идеальной жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 2 (18). С. 9–15.

4. *Бубнов В.А.* Об интеграле уравнений движения идеальной жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 2 (18). С. 16–25.

5. *Бубнов В.А.* О деформационных движениях частицы жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 1 (20). С. 71–77.

6. *Бубнов В.А.* Кинематические соотношения частицы жидкости при её деформационном движении // Физическое образование в вузах. 2012. Т. 18. № 3. С. 111–119.

7. *Бубнов В.А.* Замечания к выводу уравнения неразрывности гидродинамических течений // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2011. № 2 (8). С. 7–15.

8. *Бубнов В.А.* Об уравнении неразрывности в гидродинамике // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 4 (20). С. 38–49.

9. *Кастерин Н.П.* О несостоятельности принципа относительности Эйнштейна // Отдельный оттиск из «Записок Новороссийского университета». Одесса, 1919. 11 с.

10. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / пер. с лат. А. Н. Крылова // Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. VII. М. – Л.: АН СССР, 1936. 696 с.

11. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики: учеб. пособие для университетов. М.: Наука, 1972. С. 442–443.

12. *Умов Н.А.* Единообразный вывод преобразований, совместных с принципом относительности // Умов Н.А. Избранные сочинения / под ред. А.С. Предводителева. М. – Л.: Гос. Изд. технико-теоретической литературы, 1950. С. 492–499.

13. *Эйнштейн А.* К электродинамике движущихся тел // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 1: Работы по теории относительности 1905–1920. М.: Наука, 1965. С. 7–35.

Literatura

1. *Bubnov V.A.* Ob izmenenii plotnosti v gidrodinamicheskom potoke // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2014. № 4 (16). S. 9–19.

2. *Bubnov V.A.* Ob uravneniyax gidrodinamiki s peremennoj plotnost'yu // Sed'my'e Polyaxovskie chteniya: tezisy' dokladov Mezhdunarodnoj konferencii po mexanike (Sankt-Peterburg, 2–6 fevralya 2015 g.) M.: Izdatel' I.V. Balanov, 2015. 86 s.

3. *Bubnov V.A.* Ob utochnenii uravnenij gidrodinamiki ideal'noj zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2015. № 2 (18). S. 9–15.

4. *Bubnov V.A.* Ob integrale uravnenij dvizheniya ideal'noj zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2015. № 2 (18). S. 16–25.

5. *Bubnov V.A.* O deformacionny'x dvizheniyax chasticzy' zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2015. № 1 (20). S. 71–77.

6. *Bubnov V.A.* Kinematicheskie sootnosheniya chasticzy' zhidkosti pri eyo deformacionnom dvizhenii // Fizicheskoe obrazovanie v vuzax. 2012. T. 18. № 3. S. 111–119.

7. *Bubnov V.A.* Zamechaniya k vy'vodu uravneniya nerazry'vnosti gidrodinamicheskix techenij // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2011. № 2 (8). S. 7–15.

8. *Bubnov V.A.* Ob uravnenii nerazry'vnosti v gidrodinamike // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki». 2015. № 4 (20). S. 38–49.

9. *Kasterin N.P.* O nesostoyatel'nosti principa otnositel'nosti E'jnshtejna // Otdel'ny'j ottisk iz «Zapisok Novorossijskogo universiteta». Odessa, 1919. 11 s.

10. *N'yuton I.* Matematicheskie nachala natural'noj filosofii / per. s lat. A. N. Kry'lova // Sobranie trudov akademika A.N. Kry'lova. T. VII. M. – L.: AN SSSR, 1936. 696 s.

11. *Tixonov A.N.* Uravneniya matematicheskoj fiziki: ucheb. posobie dlya universitetov. M.: Nauka, 1972. S. 442–443.

12. *Umov N.A.* Edinoobrazny'j vy'vod preobrazovanij, sovmestny'x s principom otnositel'nosti // Umov N.A. Izbranny'e sochineniya / pod red. A.S. Predvoditeleva. M. – L.: Gos. Izd. texniko-teoreticheskoj literatury', 1950. S. 492–499.

13. *E'jnshtejn A.* K e'lektrodinamike dvizhushhixsya tel // E'jnshtejn A. Sobranie nauchny'x trudov. T. 1: Raboty' po teorii otnositel'nosti 1905–1920. M.: Nauka, 1965. S. 7–35.

V.A. Bubnov

On the Analogy between Sound and Electromagnetic Waves

The author has got a new equation of acoustics, based on the equations of hydrodynamics of a perfect fluid, taking into account the variability of the mass of the fluid particles, and the continuity equation, which holds the chamfer of coordinate corners of the particle. The conditions of invariance of the equation concerning Lorentz transformations were analysed. A certain analogy between sound and electromagnetic waves was established.

Keywords: hydrodynamic speed, sound speed, light speed; wave: sound, electromagnetic; invariance; Lorentz transformations.