

**В.М. Овсянников**

## **Образование волн в стационарном ламинарном течении**

Анализируется гипотеза о возможности одновременного решения вычислительной машиной системы уравнений газовой динамики, уравнений, получающихся взятием производных от этой системы, и их линейной комбинации — волнового уравнения. Делается вывод о возможном отражении некоторых свойств решения волнового уравнения в решении газодинамической задачи в виде «паразитических осцилляций». Предложенная гипотеза требует численных иллюстраций и проверок.

*Ключевые слова:* уравнения газовой динамики; волновое уравнение; генерация волн давления; неустойчивость численного решения.

**В** 1997–1999 годы профессор В.А. Бубнов [1; 2] обратил внимание на то, что Н.Е. Жуковским было указано на возникновение в уравнении неразрывности членов второго порядка по времени течения. Вскоре у Эйлера были найдены аналогичные члены второго порядка, содержащие якобианы, проникающие затем в волновое уравнение и генерирующие звук [3]. Потом было обнаружено, что связь поля скорости с генерацией звука осуществляется также через образование в волновом уравнении якобианов из конвективных членов уравнений движения. Поэтому в данной статье обсуждается ситуация, когда генерация звука и волн давления происходит в классической общепринятой системе уравнений газовой динамики без привлечения членов высокого порядка малости уравнения неразрывности.

1. Английский математик М. Дж. Лайтхилл опубликовал метод вывода волнового уравнения из линеаризованной системы уравнений газовой динамики простыми формальными математическими операциями. Этих операций две: взятие производной от решаемого уравнения и составление разности двух решаемых в системе уравнений. И в том и в другом случае решение одинаково у исходного и преобразованного уравнений. Поэтому возникает вопрос: отражается ли в решении газодинамической системы уравнений решение волнового уравнения? Или, говоря другими словами, решает ли ЭВМ параллельно с задачей обтекания тела в какой-то степени волновое уравнение? Рассмотрим это подробнее.

Пусть три системы уравнений имеют одинаковое решение в виде полей компонент скорости  $u$ ,  $v$ , давления  $p$  и плотности  $\rho$ . Тогда, программируя одну из них — систему уравнений газовой динамики, мы заставим вычислительную машину отражать и решение волнового уравнения, которого мы явно

не программировали. При этом раскочку получающегося численного решения задачи обтекания можно воспринимать как отражение волнообразования, возникающего за счет ненулевой правой части неоднородного волнового уравнения.

В 1952–1954 гг. Лайтхилл [4] вывел методом акустической аналогии волновое уравнение, взяв производную по времени от уравнения неразрывности производную по координатам от уравнений движения и сложив результаты взятия производных. Он сделал это для малых отклонений плотности, давления и компонент скорости от значений для стационарного течения. В отечественной литературе это описано в учебнике Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [5].

Проиллюстрируем этапы вывода волнового уравнения на простых алгебраических уравнениях и уравнениях газовой динамики для плоских двухмерных течений.

Первым шагом построений, выполненных Лайтхиллом, является взятие производных от уравнений газодинамической системы. Проанализируем это и проиллюстрируем на простом геометрическом примере.

2. Алгебраическое уравнение единичной окружности с центром в начале системы координат имеет вид:

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (1)$$

График окружности может быть получен вычислением по формуле:

$$y = \sqrt{(1 - x^2)}$$

или из решения обыкновенного дифференциального уравнения, полученного дифференцированием уравнения (1):

$$2x dx + 2y dy = 0,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (2)$$

с привлечением начального условия

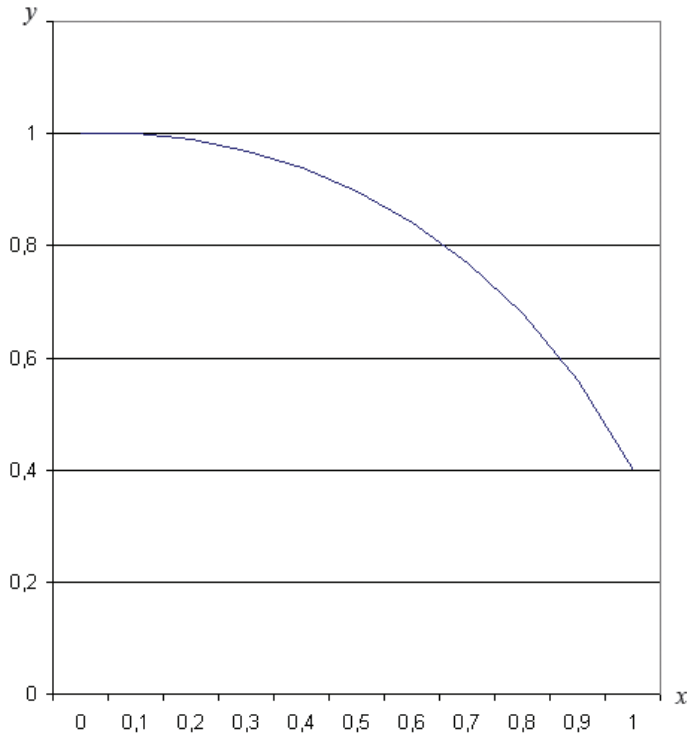
$$y = 1 \text{ при } x = 0 \quad (3)$$

Результат численного решения уравнения (2) с начальным условием (3) при достаточно крупном шаге по  $x$  с  $\Delta x = 0,1$ , приведен на рисунке 1.

Мы видим, что при крупном шаге счета для  $x = 1$  дуга имеет координату  $y = 0,4$ , хотя при точном счете должна бы достичь нуля. Результат быстро уточняется при уменьшении шага счета  $\Delta x$ .

Первым этапом вывода волнового уравнения в методе акустической аналогии Лайтхилла является взятие производных по  $t$  от уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$



**Рис. 1.** Результат численного решения уравнения (2) с начальным условием (3) при достаточно крупном шаге по  $x$  с  $\Delta x = 0,1$

по  $x$  от уравнения движения по оси  $x$

$$\frac{\rho \partial u}{\partial t} + \frac{\rho u \partial u}{\partial x} + \frac{\rho v \partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{5}$$

по  $y$  от уравнения движения по оси  $y$

$$\frac{\rho \partial v}{\partial t} + \frac{\rho u \partial v}{\partial x} + \frac{\rho v \partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{6}$$

Мы ограничиваемся плоскими двухмерными течениями невязкого газа. Вывод уравнений Эйлера механики жидкости и газа производится при предположении, что производные компонент скорости  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  не меняются в пределах контрольной фигуры и ее окрестности. Поэтому уравнение неразрывности не содержит производных второго порядка, например,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

Взятие производной по времени  $t$  от уравнения неразрывности (4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho \partial u}{\partial x} + \frac{u \partial \rho}{\partial x} + \frac{\rho \partial v}{\partial y} + \frac{v \partial \rho}{\partial y} = 0$$

дает

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\rho \partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{u \partial^2 p}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\rho \partial^2 v}{\partial y \partial t} + \frac{v \partial p^2}{\partial y \partial t} = 0. \quad (7)$$

Взятие производной по  $x$  от уравнения движения (5)

$$\frac{\rho \partial u}{\partial t} + \frac{\rho u \partial u}{\partial x} + \frac{\rho v \partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

дает

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\rho \partial^2 u}{\partial t \partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{u \partial u}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{v \partial u}{\partial y} + \\ &+ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Члены  $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$  и  $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$  с хорошей точностью дают якобиан поля

скорости, умноженный на минус  $\rho$ :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \approx \rho \left[ -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \right] = -\rho \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right],$$

если для сжимаемого газа приближенно положить, что

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial y},$$

как в несжимаемом течении.

Уравнение (8) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right] + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\rho \partial^2 u}{\partial t \partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{u \partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{v \partial u}{\partial y}. \quad (9)$$

Взяв производную по  $y$  от уравнения движения (6)

$$\frac{\rho \partial v}{\partial t} + \frac{\rho u \partial v}{\partial x} + \frac{\rho v \partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

получим:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\rho \partial^2 v}{\partial t \partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{v \partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}.$$

Объединяя приближенно два члена  $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$  и  $\rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$  левой части

в якобиан поля скорости

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \approx \rho \left[ -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \right] = -\rho \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right],$$

получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right] + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\rho \partial^2 v}{\partial t \partial y} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) u \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \frac{v \partial v}{\partial y}. \quad (10)$$

Система уравнений (7), (9), (10) должна иметь то же решение, что и исходная система уравнений газовой динамики (4), (5), (6), если для нее правильно задать граничные условия. Напомним, что при расчете графика окружности мы к дифференциальному уравнению присоединяли условие

$$y = 1 \text{ при } x = 0. \quad (3)$$

Если бы мы этого не сделали или бы дали другое начальное значение, то график рисунка 1 поднялся или опустился бы на некоторую величину по оси  $y$  и, может быть, получил бы некоторое искажение вдоль оси  $x$ , так как  $x$  входит в правую часть решаемого уравнения. Но нам для нашего исследования достаточно отметить, что некоторые свойства решения системы (7), (9), (10) имеют возможность проникнуть в решение системы уравнений газовой динамики (4), (5), (6).

Напомним, что российским математиком В.В. Русановым было опробовано решение задач газовой динамики с использованием системы уравнений повышенного порядка. Это подтверждает гипотезу об одинаковости решений у продифференцированного уравнения и исходного.

3. Проанализируем второй шаг метода акустической аналогии Лайтхилла, состоящий в сложении (или вычитании в зависимости от расположения членов) результатов взятия производных. Опять обратимся к примеру из элементарной математики. Для системы линейных алгебраических уравнений  $ax + by + c = 0$ ,  $fx + gy + h = 0$  известно, что сумма, разность или другая какая-либо линейная комбинация двух уравнений, решаемая вместе с одним из исходных уравнений, например,  $(a + f)x + (b + g)y + c + h = 0$ ,  $ax + by + c = 0$ , имеет то же решение, что и исходная система уравнений. Решением является точка с координатами  $x, y$ , находящаяся на пересечении двух прямых, например,  $y = -1 + 2x$ ,  $y = x$ , приведенных на рисунке 2.

Неизменность корней при суммировании двух уравнений системы не зависит от линейности или нелинейности графиков функций. Такое же свойство можно увидеть при касании параболы

$$y = x^2 \quad (11)$$

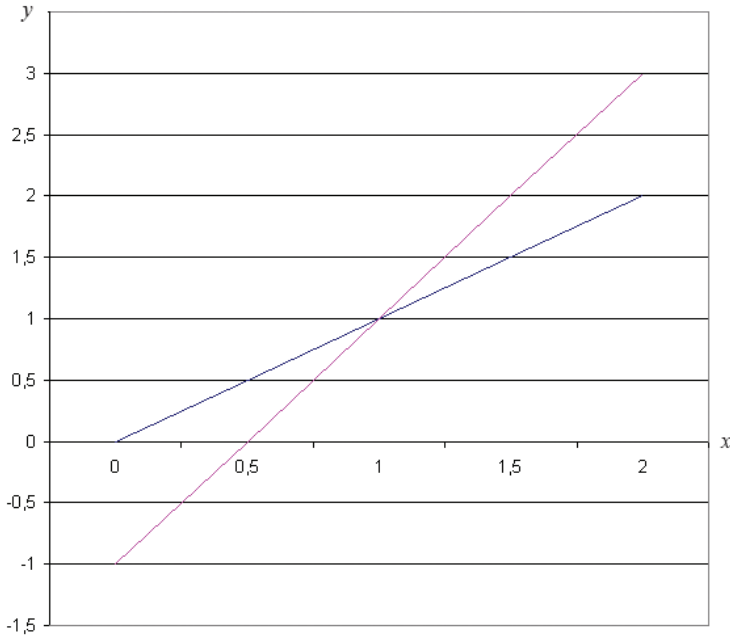
с прямой

$$y = -1 + 2x, \quad (12)$$

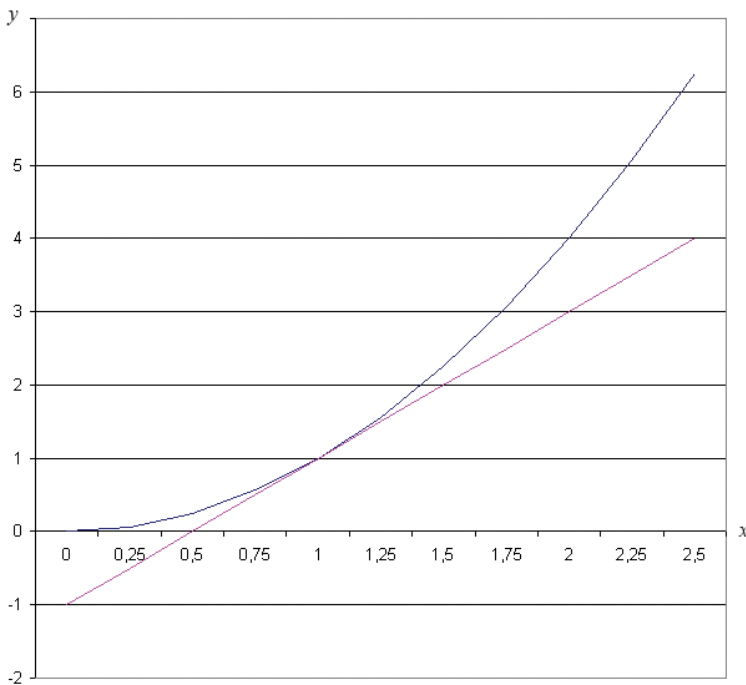
продемонстрированном на рисунке 3. При этом график суммы двух функций

$$2y = x^2 - 1 + 2x \text{ или } y = \frac{1}{2}(x^2 - 1 + 2x) \quad (13)$$

будет проходить между графиков двух исходных функций через точку решения системы уравнений.



**Рис. 2.** Графики прямых линий, иллюстрирующие решение системы двух уравнений:  $y = -1 + 2x$ ,  $y = x$



**Рис. 3.** Сплошными линиями показаны графики двух линий, иллюстрирующие решение системы двух уравнений:  $y = x^2$ ,  $y = -1 + 2x$  (штриховой линией показана их полусумма)

Поэтому можно ожидать, что совместное решение волнового уравнения и продифференцированного уравнения неразрывности будет согласовано с решением уравнений газовой динамики.

Таким образом, препятствием к идентичности решений волнового уравнения и системы уравнений газовой динамики является неконтролируемое задание начального условия для колебательного процесса. Но начальная фаза колебаний не важна, когда интересуются только интенсивностью колебаний. Перейдем к получению волнового уравнения.

4. Мы подготовили равенствами (7), (9), (10) выражения отдельных членов правой части волнового уравнения. Сложив уравнения (7), (9), (10), получаем неоднородное волновое уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = & -2\rho \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right] + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{u \partial u}{\partial x} + \\ & + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) v \frac{\partial u}{\partial y} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{u \partial^2 \rho}{\partial x \partial t} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{v \partial \rho^2}{\partial y \partial t} + \\ & + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) u \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) v \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Левая его часть осуществляет передачу волн по пространству, а правая, неоднородная часть — генерацию новых волн. Интересно понять, как поле стационарного ламинарного течения влияет на зарождение новых гармонических колебаний. Для этого пренебрежем производными первого порядка

от плотности  $\frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}$  как не участвующими в основном волновом процессе.

Волновое уравнение получает вид:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2\rho \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right].$$

Правая неоднородная его часть содержит якобиан поля скорости  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ ,

отражающий, говоря словами геометров, искажение пространства. В различных местах поля течения величина модуля якобиана различна. Места с большими значениями модуля якобиана генерируют сильные периодические гармонические колебания плотности и давления.

Еще одним препятствием к идентичности решений волнового уравнения и системы уравнений газовой динамики является не подходящий для решения волнового уравнения шаг сетки по времени и пространственным координатам. В самом деле, решая систему уравнений газовой динамики, мы подбираем сетку только для этой системы, не обращая внимания на пригодность ее для решения волнового уравнения. Поэтому получаемое решение может лишь отдаленно отражать характер решения волнового уравнения, проявляя

это в генерации пилообразных колебаний, принимаемых нами за «паразитические осцилляции».

5. Приведем пример возникновения колебаний. Проявлением волнового процесса при обтекании тела потоком газа может рассматриваться явление флаттера на рулевых органах самолета или лопатках турбомашин. При входе в атмосферу Земли метеоритов на их поверхности образуется пленка расплава камня или металла с возникновением на ней регулярной периодической системы лунок — регмаглиптов. Целесообразно связать их появление с явлением флаттера, рассматривая их слепком застывших колебаний жидкой пленки, возникающей при ориентированном полете на участке траектории с максимальными тепловыми потоками.

Астрономы оценивают размеры лунок, находящихся в пределах от 0,05 до 0,2 характерного размера метеорита [6], склоняясь к 0,1, как к среднему их значению. Расчет, подробно представленный в монографии [7] для поперечного потенциального обтекания цилиндра с комплексным потенциалом

$$w = z + \frac{1}{z},$$

дал распределение якобиана по углу  $\varphi$  по закону  $\cos(6\varphi)$ , а значение коэффициента для вычисления размера регмаглиптов 0,13 при среднем экспериментальном значении 0,1. Согласование результатов оценок можно считать удовлетворительным, несмотря на неполноту учета особенностей обтекания.

Ответ на вопрос, поставленный в начале статьи, в какой-то степени положительный. Решая задачу обтекания тела газом, ЭВМ с какой-то большой погрешностью отражает и решение волнового уравнения. Для понимания поведения решений, получаемых численным методом, целесообразно обратить внимание на двойственность положения машины, вынужденной выдавать одновременно решение двух задач.

### *Литература*

1. Бубнов В.А. Физические принципы гидродинамических движений // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. Вып. 4. 1997. С. 206–269.
2. Бубнов В.А. Кинематика жидкой частицы // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. Вып.7. 1999. С. 11–29.
3. Овсянников В.М. История вывода уравнения неразрывности // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Казань, 20–24 августа 2015 г.). С. 2823–2824.
4. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. Part I. General theory. Part II. Turbulence a source sound // Proc. Roy. Soc., A211, 1952, A222, 1954.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
6. Бронитэн В.А. Физика метеорных явлений. М.: Наука, 1981. 416 с.
7. Овсянников В.М. Конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. М.: Спутник плюс, 2014. 250 с.



*Literatura*

1. *Bubnov V.A.* Fizicheskie principy' gidrodinamicheskix dvizhenij // Problemy' aksiomatiki v gidrogazodinamike. Vy'p. 4. 1997. S. 206–269.
2. *Bubnov V.A.* Kinematika zhidkoj chasticzy' // Problemy' aksiomatiki v gidrogazodinamike. Vy'p.7. 1999. S. 11–29.
3. *Ovsyannikov V.M.* Istoriya vy'voda uravneniya nerazry'vnosti // XI Vserossijskij s'ezd po fundamental'ny'm problemam teoreticheskoy i prikladnoj mexaniki (g. Kazan', 20–24 avgusta 2015 g.). S. 2823–2824.
4. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. Part I. General theory. Part II. Turbulence a source sound // Proc. Roy. Soc., A211, 1952, A222, 1954.
5. *Landau L.D., Lifshicz E.M.* Hidrodinamika. M.: Nauka, 1988. 736 s.
6. *Bronshhte'n V.A.* Fizika meteorny'x yavlenij. M.: Nauka, 1981. 416 s.
7. *Ovsyannikov V.M.* Konechno-raznostnoe uravnenie nerazry'vnosti Leonarda E'jlera. M.: Sputnik plyus, 2014. 250 s.

*V.M. Ovsyannikov*

**Generation of the Waves in Stationary Laminar Flow**

The hypothesis about a simultaneous solution of the equations of gas dynamics, equations obtained by taking the derivatives of this system, and their linear combination — the wave equation by a computing machine is analyzed. The author makes a conclusion of a possible reflection of certain properties of solution of the wave equation in solving gas-dynamic problem as a “parasitic oscillation”. The proposed hypothesis requires numerical illustrations and inspections.

*Keywords:* the equations of gas dynamics; the wave equation; generation of waves of pressure; instability of the numerical solution.