ФИЗИКА

В.А. Бубнов

О постановке задач газовой динамики

В работе проводится критический анализ традиционной постановки задач газовой динамики, в частности обсуждается достоверность использования уравнения неразрывности сжимаемого газа. Приводятся уравнения автора, описывающие течение газа, в которых масса частицы изменяется в процессе движения. В рамках этих уравнений показано, что плотность газа зависит от модуля гидродинамической скорости. В качестве примера использования уравнений автора произведен расчет изменения плотности в смерчеподобном вихре.

Ключевые слова: частица жидкости; второе начало Ньютона; идеальная жидкость; адиабата Пуассона; изолированный вихрь; ускоренные и замедленные течения.

Общеизвестно, что для описания газодинамических течений используются уравнения движения идеальной жидкости в форме Эйлера следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь u, v, w — суть гидродинамической скорости вдоль осей x, y, z соответственно, t — время, p — давление и, наконец, ρ — плотность жидкости или газа.

В большинстве случаев предполагается, что плотность ρ есть известная функция от давления, и в качестве таковой используется адиабата Пуассона, имеющая следующую форму:

$$p = const\cdot\rho^{\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}\cdot\rho^{\gamma}, \qquad (2)$$

где γ — суть отношения теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Движения, в которых выполняется соотношение (2), называются баротропными.

Соотношения (1) и (2) содержат пять неизвестных: три составляющие скорости, давление и плотность; исходных уравнений всего четыре.

Чтобы исходную систему уравнений сделать полной, привлекается дополнительное соотношение, называемое уравнением неразрывности, одна из форм которого такова:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{3}$$

где использован так называемый оператор Эйлера

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4}$$

Теперь общеизвестная постановка задач газовой динамики сводится к пяти вышенаписанным соотношениям (1)–(3), содержащим такое же количество неизвестных.

Однако в научной литературе не содержится ни одной газодинамической задачи, решенной в такой постановке. С точки зрения физических процессов, происходящих в газодинамических течениях, такая постановка задачи газовой динамики ошибочна.

Действительно, система уравнений (1) получена из второго закона движения Ньютона, общепринятая векторная форма которого для материальной точки постоянной массы m, такова:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}. \tag{5}$$

Здесь $\vec{V}$ — вектор скорости материальной точки, составляющие которого на оси x, y, z суть u, v, w соответственно; $\vec{F}$ — вектор силы, который в данном рассмотрении будет представлять поверхностную силу.

Для получения системы (1) составляющие на координатные оси x, y, z уравнения (5) применяются к частице жидкости, отличие которой от материальной точки состоит в том, что частица жидкости участвует в деформационном движении, поэтому производная по времени в левой части (5) заменяется оператором Эйлера (4). Далее массу m, отнесенную к единице объема частицы жидкости, заменяем плотностью ρ, а поверхностную силу $\vec{F}$ выражаем через давление p.

Таким образом, система (1) есть аналог второго закона Ньютона, представленного в форме (5).

В механике же материальной точки, построенной на базе (5) ставятся две следующие задачи. Первая из них: по заданной силе (правая часть в (5)) необходимо определить кинематику материальной точки. Вторая задача: по заданной кинематике точки (левая часть в (5)) определить силу, являющуюся причиной движения.

Очевидно, что эти две задачи полностью переносятся и на систему уравнений газовой динамики в форме (1).

Действительно, если в системе (1) задать давление, как причину движения, а плотность ρ выразить через давление p по уравнению адиабаты Пуассона (2), то в данной системе будет содержаться только три неизвестных (скорости u, v, w) и она будет замкнута, т. е. число уравнений равно числу неизвестных.

Из молекулярно-кинетических представлений следует, что система (1) описывает два вида движений. Первое из них — это тепловое движение молекул, через которое определяются давление и плотность, связанные адиабатой Пуассона. Второе движение — это наблюдаемое гидродинамическое движение со скоростями u, v, w.

Известно (см., например, [12]), что термодинамический процесс, идущий по адиабате Пуассона, происходит при постоянной энтропии, дифференциал которой определяется как отношение подведенного к системе количества тепла к температуре системы.

Рассматривая частицу жидкости как термодинамическую систему, последнее означает, что изменение p и ρ в системе (1) от одних значений к другим реализуется в рамках равновесной термодинамической системы; следовательно, гидродинамическое движение не влияет на тепловое, и они сосуществуют независимо друг от друга.

В рамках сказанного и при условии, что масса частицы жидкости не изменяется в процессе движения, связь плотности с гидродинамическими скоростями в форме (3) представляется некорректной.

Для анализа правомерности соотношения (3) рассмотрим метод вывода уравнения неразрывности, описанный Н.Е. Жуковским в [12].

В этой работе скорость деформационного движения частицы жидкости Н.Е. Жуковский определяет так:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial z},$$

где через F обозначена специальная функция.

$$F=\frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 z^2+2\theta_1 yz+2\theta_2 zx+2\theta_3 xy), \qquad (6)$$

для которой справедливо соотношение:

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=2F,$$

установленное Эйлером.

Коэффициенты в правой части (6) определяются через гидродинамические скорости *u, v, w* следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$2\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, 2\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, 2\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Функция (6) представляет уравнение поверхности второго порядка. Для перехода в этой функции к осям деформации необходимо специальным преобразованием получить новую форму этой функции, в которой присутствуют только члены с квадратами координат. Такая форма квадратичной поверхности называется канонической.

Н.Е. Жуковский переход от (6) к ее канонической форме реализовал приравниванием к нулю величины θ_1, θ_2, θ_3, т. е. ввел следующие кинематические ограничения:

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

В результате чего поверхность *F* упрощается так:

$$F = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_3 z^2) \tag{8}$$

Вид формы поверхности (8) означает, что прямоугольные оси координат *x, y, z* совпадают с главными осями деформации ξ, η, ζ.

Для вычисления коэффициента кубического расширения частицы жидкости в [13] предполагается, что частица имеет форму шарика, уравнение которого такова:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a.$$

и определяется вид этого уравнения по прошествии времени *dt*. В результате такого анализа первоначальный объем сферы

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

превращается в объем эллипсоида:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 (1 + \varepsilon_1 dt)(1 + \varepsilon_2 dt)(1 + \varepsilon_3 dt).$$

После чего в [13] под коэффициентом кубического расширения предлагается величина:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta t} = \frac{(V_0 - V_1)}{V_0 \cdot \Delta t}, \tag{9}$$

которая из приведенных формул для V_0 и V_1 выражается через характеристики деформационного движения так:

$$\theta = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{10}$$

Если θ = 0, что в свою очередь означает равенство объемов V_0 и V_1, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) называют уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости, и оно означает, что частица жидкости не расширяется при своем движении.

В работах автора [1–4] изложенный метод Жуковского обобщен на случай, когда ограничения (7) не постулируются и предложена следующая формула для коэффициента кубического расширения:

$$\theta = -(\varepsilon + A\,d\,t + B\,d\,t^2), \tag{12}$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$
$$A = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2),$$
$$B = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\theta_1\theta_2\theta_3 - (\varepsilon_1\theta_1^2 + \varepsilon_2\theta_2^2 + \varepsilon_3\theta_3^2).$$

Искусственным путем в соотношения (10) и (12) можно ввести изменение плотности жидкости.

Действительно, частица жидкости характеризуется массой m и плотностью ρ, через которые объемы V_0 и V определяются так:

$$V_0 = \frac{m_0}{\rho_0}, \; V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}. \tag{13}$$

Пусть масса частицы не изменяется, т. е. $m = m_0 = m_1$, тогда с учетом (13) для θ получаем:

$$\theta = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \cdot \Delta t} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \tag{14}$$

В таком случае, например, соотношение (10) принимает вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{15}$$

Уравнение (15) совпадает с уравнением (3), которое пытаются использовать при постановке задач газовой динамики.

Следует заметить, что при анализе плоских гидродинамических течений по изложенной методике вместо коэффициента кубического расширения имеет место коэффициент изменения площади частицы [4], который невозможно выразить через изменение плотности. Это, в свою очередь, ставит под сомнение соотношение (14).

Система уравнений (1) описывает течение жидкости или газа, в которых масса частицы жидкости остается постоянной в процессе движения. Это есть частный случай, который не всегда имеет место. Для построения системы уравнений механики жидкости или газа в более общем необходимо пересмотреть форму уравнения (5).

Известно, что Ньютон предложил только словесную формулировку второго закона движения. Формульный вид этого закона в форме (5) предложил Лагранж в своей знаменитой «Аналитической механике». В работе [7] показано, что если учитывать в полной мере словесную формулировку Ньютона, то второй закон движения необходимо представить так:

$$c\frac{d(m\vec{V})}{dt}=\vec{F}. \tag{16}$$

Здесь введен коэффициент пропорциональности C, который, с одной стороны, может приводить к одинаковой размерности правой и левой частей в (16), а с другой стороны, при общепринятых размерностях величин, входящих в (16), может быть отвлеченным числом. Более того, в [8] и [11] доказано, что при ускоренных течениях $c > 0$, а при замедленных $c < 0$.

В работах автора [5; 6] применяем уравнения Ньютона в форме (16) к анализу движения частицы жидкости получена новая система уравнений идеальной жидкости, которая имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&c\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&c\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&c\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Система уравнений (17) отличается от системы (1) наличием в левой части (17) множителя c, который для конкретных течений суть положительная величина, а для других замедленных течений является величиной отрицательной.

В работе автора [9] доказано, что в течениях, определяемых системой (17), скорость распространения энергии определяется формулой:

$$g = \frac{2\gamma}{(\gamma - 1)}\sqrt{\frac{2p}{c\rho}}, \tag{18}$$

где, как и ранее, γ — отношение теплоемкостей. Эта формула при $\gamma = 2$ и $c = 4$ переходит в известную формулу Н.А. Умова [15], справедливую для идеальной несжимаемой жидкости, движение которой описываются уравнениями Эйлера.

Формула (18) показывает, что скорость g распространения энергии пропорциональна величине $\sqrt{\frac{p}{\rho}}$, которая известна как формула Ньютона для определения скорости звука.

При выводе уравнений (17) полагается переменность массы m частицы жидкости, из чего следует, что плотность ρ зависит не только от давления, но и от гидродинамических скоростей u, v, w.

Для определения зависимости массы частицы жидкости от гидродинамических скоростей u, v, w перепишем векторное уравнение (16) для указанных скоростей. Тогда будет иметь:

$$\left.\begin{aligned} cm\frac{du}{dt} + cu\frac{dm}{dt} &= X, \\ m\frac{dv}{dt} + cv\frac{dm}{dt} &= Y, \\ m\frac{dw}{dt} + cw\frac{dm}{dt} &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Здесь X, Y, Z — проекции силы на оси x, y, z соответственно.

Понятие живой силы материального тела было введено Иоганном Бернулли (см: [11]). Согласно его представлениям, живая сила материального тела определяется как величина, пропорциональная произведению массы тела на квадрат его скорости. В данном рассмотрении, в соответствии с этим определением, живую силу частицы жидкости определим так:

$$T = c_2 m g^2, \tag{20}$$

где c_2 — эмпирический коэффициент пропорциональности.

Теперь рассмотрим первое уравнение системы (19), и в нем силу X выразим через изменение во времени живой силы частицы жидкости. Действительно, работа этой силы, отнесенная к единице времени, равна $X \cdot u$, а изменение живой силы равняется $\frac{dT}{dt}$. Приравниваем эти величины и получаем:

$$X \cdot u = \frac{dT}{dt} = c_2 g^2 \frac{dm}{dt}.$$

Из этого равенства определяем X и подставляем в первое соотношение системы (19), в результате получаем:

$$cm\frac{du}{dt} + cu\frac{dm}{dt} = \frac{c_2 g^2}{u}\frac{dm}{dt}. \tag{21}$$

Далее введем дополнительные обозначения: $\frac{u^2}{g^2} = \beta^2$ и $\frac{c}{c^2} = \alpha$, которые позволяют равенству (21) придать вид, удобный для интегрирования:

$$\frac{\alpha\beta d\beta}{(1-\alpha\beta^2)} = \frac{dm}{m}.$$

Производя интегрирования в этом соотношении, получаем:

$$\ln m = -\frac{1}{2}\ln(1-\alpha\beta^2) + \ln m_0.$$

Теперь здесь освободимся от логарифмов, после чего имеем:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\alpha\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{g_0^2}}}, \tag{22}$$

где введена новая величина скорости:

$$g_0 = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{2\sqrt{2c_2}}{c}\sqrt{\frac{p}{\rho}}. \tag{23}$$

Произведя аналогичное интегрирование во втором и третьем соотношениях системы (19), получаем:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{g_0^2}}}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{g_0^2}}}. \tag{24}$$

Каждая из формул в (22) и (24) определяет зависимость массы частицы жидкости от одной из скоростей *u, v, w.* Чтобы получить зависимость массы m от $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$, напишем следующее соотношение:

$$\frac{1}{m^2(u)} + \frac{1}{m^2(v)} + \frac{1}{m^2(w)} = \frac{1}{m^2(u,v,w)}. \tag{25}$$

Это соотношение переходит в очевидное тождество, если $m(u) = m(v) = = m(w) = m(u,v,w) = m.$ После подстановки (22) и (24) в (25) нетрудно получить разыскиваемую зависимость массы от квадрата гидродинамической скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{3g_0^2}}}. \tag{26}$$

Отнеся массы m и m_0 к величине объема частицы жидкости, получаем из (26) зависимость плотности от квадрата гидродинамической скорости, а именно:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{3g_0^2}}}. \tag{27}$$

Полученное значение плотности содержит в себе зависимость от двух величин: от V^2 и от величины ρ_0, которая зависит от давления, например, в рамках адиабаты Пуассона. Таким образом, формула (27) устанавливает изменения плотности от теплового и гидродинамического движений.

Если формулу (27) подставить в систему (17), рассматривать стационарные потенциальные течения, то общеизвестным примером (см., например, [12]) можно получить следующее соотношение в дифференциалах:

$$\frac{c\,dV^2}{2\sqrt{1 - \frac{V^2}{3g_0^2}}} = -\frac{1}{\rho_0}dp. \tag{28}$$

Далее ограничимся случаем, когда:

$$\left(1 - \frac{V^2}{3g_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{V^2}{6g_0^2} + \ldots, \tag{29}$$

что позволяет соотношение (28) переписать так:

$$\frac{c}{2}\left(1+\frac{V^2}{6g_0^2}\right)dV^2=-\frac{1}{\rho_0}dp.$$

В рамках равновесной термодинамической системы под ρ_0 будем подразумевать текущее значение ρ, т. е. по адиабате Пуассона считаем, что $p=\rho_0^\gamma=\rho^\gamma$. Теперь для ускоренных течений слева и справа в (29) возьмем определенные интегралы:

$$\frac{c}{2}\int_0^V\left(1+\frac{V^2}{6g_0^2}\right)dV^2=-\int_{p_0}^{p}\frac{1}{\rho_0}dp.$$

В результате интегрирования получаем:

$$\frac{c}{2}V^2\left(1+\frac{V^2}{12g_0^2}\right)+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{p_0}{\rho_0}. \qquad (30)$$

Уравнение (30) устанавливает связь между скоростью, давлением и плотностью в изолированных течениях, т. е. в газодинамических течениях в условиях постоянства энтропии. Если вторым слагаемым в скобках соотношения (30) пренебрегать, то получим

$$\frac{cV^2}{2}+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{p_0}{\rho_0}. \qquad (31)$$

Уравнение (31) подробно исследовано в [12].

В качестве еще одного примера газодинамических течений рассмотрим движения в изолированном вихре. Согласно данным в [10], изолированный вихрь представляет собой полую вихревую трубку, стенки которой сформированы уплотненной газовой средой, благодаря которой контур вихря выделяется на фоне окружающей среды. В то же самое время этот контур, представляющий границы вихря, разделяет область газодинамических течений на два. В одной из них, внутри вихря окружная скорость возрастает до максимальной на границе по закону $v=\omega r$ (ω — угловая скорость, r — радиус, измеряемый от осевой линии вихря). Вторая область от максимального радиуса r_m до бесконечности определяет течение, в котором окружная скорость уменьшается по закону $vr^n=const=v_m r_m^n$ (здесь v_m — максимальная окружная скорость).

По данным [10], указанная граница изолированного вихря определяется поведением в зависимости от радиуса, проекцией на ось z роторной скорости. Эта величина по окружности скорости v определяется так:

$$\left(rot\vec{V}\right)_z = \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right). \qquad (32)$$

В простейшем случае [10], когда движение в изолированном вихре определяется только окружной скоростью v, кинематика вихря такова:

при $0 \le r \le r_m,\ v = \omega r,\ v_m = \omega r_m,\ \omega_z = 0;$

при $r_m \le r < \infty,\ v \cdot r^n = v_m r_m^n,\ v = \frac{v_m r_m^n}{r^n} = \frac{c_3}{r_n},\ \omega_z = -\frac{c_3(n-1)}{r^{n+1}}.$

В цилиндрической системе координат, в рамках приведенных кинематических соотношений система уравнений (17) сводится к одному уравнению для окружной скорости v, а именно

$$c\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}. \qquad (33)$$

Теперь произведем интегрирование в (33) при $0 \le r \le r_m$, т. е. во внутренней части вихря. Это позволяет соотношение (33) переписать так:

$$c\int_0^r \frac{v^2}{r}dr = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho}. \qquad (34)$$

При вычислении интегралов в (34) используем кинематику внутренней части вихря и уравнение Пуассона (2). Нетрудно показать, что после интегрирования соотношение (34) становится таким:

$$c\frac{\omega^2 r^2}{2} = c_4\left(\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}\right) = c_4 \Delta\rho^{\gamma-1},$$

которое при позволяет определить увеличение плотности ρ с увеличением радиуса r согласно соотношению:

$$\rho = \rho_0 + \frac{c}{c_4}\frac{\omega^2 r^2}{2}, \qquad (35)$$

где $c_4 = \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}\frac{\gamma}{(\gamma-1)}.$

Кинетическую энергию внутренней части вихря будем вычислять по формуле:

$$E = \int_0^{r_m} 2\pi r \rho \frac{v^2}{2} dr, \tag{36}$$

которая с учетом кинематики внутренней части вихря и соотношения (35) приводит к следующей формуле для величины энергии, отнесенной к площади внутренней части вихря:

$$\frac{E}{\pi r_m^2} = \rho_0 v_m^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{c}{24} \frac{\rho_0 v_m^2}{\rho_0} \right). \tag{37}$$

Для анализа течения во внешней части вихря ($r_m \le r \le R$) необходимо иметь в виду, что здесь течение замедленное и в (33) надо положить $c = -c_1$, причем $c_1 > 0$, а интегрирование в (33) произвести следующим образом:

$$-c_1 \int_r^R \frac{v^2}{r} dr = \int_\rho^{\rho_0} \frac{dp}{\rho}. \tag{38}$$

Интегрирование в (38) производим при $\gamma = 2$ и $R = \infty$, тогда получаем:

$$\frac{c_1 c_3^2}{2n} \frac{1}{r^{2n}} = c_4 \Delta\rho. \tag{39}$$

Из (39) определяем плотность ρ следующим образом:

$$\rho = \rho_0 + c_1 \frac{c_5}{r^{2n}}, \tag{40}$$

где $c_5 = \dfrac{c_3^2}{2nc_4} = \dfrac{v_m^2 r_m^{2n} \rho_0^2}{4np_0}$.

Формула (40) и кинематика внешней части вихря позволяют кинетическую энергию этой части вихря определить так:

$$E = \pi c_3^2 \left\{ \rho_0 \int_{r_m}^R \frac{dr}{r^{2n-1}} + c_1 c_5 \int_{r_m}^R \frac{dr}{r^{4n-1}} \right\}. \tag{41}$$

В этой формуле особое место имеет случай $n = 1$, что соответствует $\omega_z = 0$, т. е. потенциальному течению во внешней части вихря. Вычисления по (41) для этих условий приводят к следующему результату:

$$\frac{E}{\pi r_m^2} = \rho_0 v_m^2 \left(\ln \frac{R}{r_m} + c_1 \frac{\rho_0 v_m^2}{8p_0} \right). \tag{42}$$

Если в (42) устремить радиус R к бесконечности, то энергия E, необходимая для поддержания вихря, также стремится к бесконечности, что, в свою очередь, свидетельствует о невозможности существования в природе изолированных вихрей. Это факт [14] назван парадоксом Феликса Клейна.

Если же интегрирования в (41) произвести при $n \neq 1$, то нетрудно показать, что во внешней части вихря:

$$\frac{E_m}{\pi r_m^2} = \rho_0 v_m^2 \left[\frac{1}{2(n-1)} + \frac{c_1}{8n(2n-1)} \frac{\rho_0 v_m^2}{p_0} \right]. \tag{43}$$

Формула (43) исключает вышеназванный парадокс и по форме совпадает с формулой (37), но количественно от нее отличается. Существенное количественное отличие вносят различные числовые значения коэффициентов c и c_2, которые согласно [11] определяют характер ускорительных и замедленных движений во внутренних и внешних областях изолированного вихря.

Литература

1. *Бубнов В.А.* О деформационных движениях частицы жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2008. № 1 (20). С. 71–77.
2. *Бубнов В.А.* Некоторые замечания о потенциальных гидродинамических течениях // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2010. № 2 (6). С. 7–13.
3. *Бубнов В.А.* Замечания к выводу уравнения неразрывности гидродинамических течений // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2011. № 1 (5). С. 7–15.
4. *Бубнов В.А.* Кинематика частицы жидкости в плоских гидродинамических течениях // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2010. № 1 (5). С. 61–65.
5. *Бубнов В.А.* Об изменении плотности в гидродинамическом потоке // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2014. № 4 (16). С. 9–20.
6. *Бубнов В.А.* Об уточнении уравнений гидродинамики идеальной жидкости // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2015. № 2 (18). С. 9–15.
7. *Бубнов В.А.* Об одном толковании второго закона Ньютона // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2016. № 4 (24). С. 45–50.
8. *Бубнов В.А.* Механика заряженной частицы // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2017. № 1 (25). С. 63–74.
9. *Бубнов В.А.* О скорости распространения энергии в гидродинамическом потоке // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2017. № 2 (26). С. 48–58.
10. *Бубнов В.А.* Об ускорительных и замедляющих движениях в рамках второго закона Ньютона // Потенциал. 2017. № 4. С. 76–80.
11. *Бубнов В.А.* Гидродинамика: Механика частицы жидкости. М.: ЛЕНАНД, 2018. 304 с.
12. *Жуковский Н.Е.* Кинематика жидкого тела: Гидродинамика // Жуковский Н.Е. Полн. соб. соч. / ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского; Комитет по увековечению памяти Н.Е. Жуковского; ред. коллегия: С.А. Чаплыгин, А.Н. Некрасов, В.А. Архангельский и др. Т. II. М.–Л.: ОНТИ СССР, 1935. 357 с.

13. *Кастерин Н.П.* Устранение аэродинамического парадокса Феликса Клейна // Вестник Московского университета. 1949. № 10. С. 45–50.

14. *Умов Н.А.* Уравнения движения энергии в телах // Умов Н.А. Избранные сочинения / под ред. А.С. Предводителева. М.–Л.: Гос. изд. тех-теор. лит., 1950. С. 45–50.

15. *Bubnov V.A.* Convective Heat and Mass Transfer in Insulated Trailing Swirl. New-York: Begell Hause Inc. Publishers, 1998. 174 p.

Literatura

1. *Bubnov V.A.* O deformacionny’x dvizheniyax chasticzy’ zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2008. № 1 (20). S. 71–77.

2. *Bubnov V.A.* Nekotory’e zamechaniya o potencial’ny’x gidrodinamicheskix techeniyax // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2010. № 2 (6). S. 7–13.

3. *Bubnov V.A.* Zamechaniya k vy’vodu uravneniya nerazry’vnosti gidrodinamicheskix techenij // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2011. № 1 (5). S. 7–15.

4. *Bubnov V.A.* Kinematika chasticzy’ zhidkosti v ploskix gidrodinamicheskix techeniyax // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2010. № 1 (5). S. 61–65.

5. *Bubnov V.A.* Ob izmenenii plotnosti v gidrodinamicheskom potoke // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2014. № 4 (16). S. 9–20.

6. Bubnov V.A. Ob utochnenii uravnenij gidrodinamiki ideal'noj zhidkosti // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvennye nauki». 2015. № 2 (18). S. 9–15.

7. *Bubnov V.A.* Ob odnom tolkovanii vtorogo zakona N’yutona // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2016. № 4 (24). S. 45–50.

8. *Bubnov V.A.* Mexanika zaryazhennoj chasticzy’ // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2017. № 1 (25). S. 63–74.

9. *Bubnov V.A.* O skorosti rasprostraneniya e’nergii v gidrodinamicheskom potoke // Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny’e nauki». 2017. № 2 (26). S. 48–58.

10. *Bubnov V.A.* Ob uskoritel’ny’x i zamedlyayushhix dvizheniyax v ramkax vtorogo zakona N’yutona // Potencial. 2017. № 4. S. 76–80.

11. *Bubnov V.A.* Gidrodinamika: Mexanika chasticzy’ zhidkosti. M.: LENAND, 2018. 304 s.

12. *Zhukovskij N.E.* Kinematika zhidkogo tela: Gidrodinamika // Zhukovskij N.E. Poln. sob. soch. / CAGI im. N.E. Zhukovskogo; Komitet po uvekovecheniyu pamyati N.E. Zhukovskogo; red. kollegiya: S.A. Chaply’gin, A.N. Nekrasov, V.A. Arxangel’skij i dr. T. II. M.–L.: ONTI SSSR, 1935. 357 s.

13. *Kasterin N.P.* Ustranenie ae’rodinamicheskogo paradoksa Feliksa Klejna // Vestnik Moskovskogo universiteta. 1949. № 10. S. 45–50.

14. *Umov N.A.* Uravneniya dvizheniya e'nergii v telax // Umov N.A. Izbranny’e sochineniya / pod red. A.S. Predvoditeleva. M.–L.: Gos. izd. tex-teor. lit., 1950. S. 45–50.

15. *Bubnov V.A.* Convective Heat and Mass Transfer in Insulated Trailing Swirl. New-York: Begell Hause Inc. Publishers, 1998. 174 p.

V.A. Bubnov

On the Statement of the Problems of Gas Dynamics

A critical analysis of the traditional formulation of gas dynamics problems is carried out in the work. In particular, the reliability of the use of the equation of continuity of a compressible gas is discussed in the article. The equations of the author describing the gas flow in which the mass of a particle changes in the course of motion are given. Within the framework of these equations, it is shown that the gas density depends on the modulus of hydrodynamic velocity. As an example of the use of the author's equations, a calculation of the density variation in a tornado-like vortex is made.

Keywords: a particle of liquid; Newton’s second law (principle); ideal fluid; Poisson’s adiabat; isolated vortex; accelerated and retarded currents.