

**Н.И. Попов,
Н.А. Адиганова**

Об одной математической модели биологической задачи «хищник – жертва»

Для одной математической модели «хищник – жертва» получено аналитическое решение уравнений Лотки – Вольтерры.

Ключевые слова: модель «хищник – жертва»; аналитическое решение.

В трудах А.Д. Лотки [10] и В. Вольтерры [2] была предложена математическая модель взаимодействующих популяций, описывающая сосуществование двух видов — популяций жертв и хищников. Варианты указанной модели и сходных с ней для описания различных процессов в биологии, экологии, медицине и социальных исследованиях рассмотрены в работах [1; 3–7; 9].

Пусть $X_1(t)$ — численность жертв, $X_2(t)$ — численность хищников в момент времени t ; a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные постоянные. Исследуемые уравнения модели «хищник – жертва» имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = a_1 X_1 - b_2 X_1 X_2, \\ \frac{dX_2}{dt} = -a_2 X_2 + b_1 X_1 X_2. \end{cases} \quad (1)$$

В данной статье приведем аналитическое решение уравнений (1) и сравним его с решениями, полученными численными методами.

Представим функцию $X(t)$ в виде:

$$X_i(t) = X_{i0} + \tilde{X}_i(t), \quad (2)$$

где $i = 1, 2$, $X_{10} = a_2/b_1$, $X_{20} = a_1/b_2$ — равновесные значения численности популяций, а $\tilde{X}_i(t)$ — отличие от равновесных значений. С использованием (2) преобразуем систему (1):

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}_1}{dt} = -\frac{a_2 b_2}{b_1} \tilde{X}_2 - b_2 \tilde{X}_1 \tilde{X}_2, \\ \frac{d\tilde{X}_2}{dt} = \frac{a_1 b_1}{b_2} \tilde{X}_1 + b_1 \tilde{X}_1 \tilde{X}_2. \end{cases} \quad (3)$$

В систему (3) введем величину ε , полагая, что $\varepsilon = \text{const} \ll 1$. При преобразованиях примем следующие обозначения и допущения

$$b_1 = b_2, \quad a_1 = a_2, \quad \frac{a_2 b_2}{b_1} dt = \frac{a_1 b_1}{b_2} dt = d\tau, \quad \frac{b_1}{a_2} = \frac{b_2}{a_1} \varepsilon \ll 1,$$

Получим:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}_1}{d\tau} = -\tilde{X}_2 - \varepsilon \tilde{X}_1 \tilde{X}_2, \\ \frac{d\tilde{X}_2}{d\tau} = \tilde{X}_1 + \varepsilon \tilde{X}_1 \tilde{X}_2. \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что если допустить $b_1/a_2 \approx b_2/a_1 = \varepsilon$, то математические вычисления проводятся аналогично.

Решение системы (4) будем искать в виде следующих разложений с использованием ε :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1(\tau) = n_1(\tau) + \varepsilon n_2(\tau) + \varepsilon^2 n_3(\tau), \\ \tilde{X}_2(\tau) = m_1(\tau) + \varepsilon m_2(\tau) + \varepsilon^2 m_3(\tau). \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{d\tau} + \varepsilon \frac{dn_2}{d\tau} + \varepsilon^2 \frac{dn_3}{d\tau} = -m_1 - \varepsilon m_2 - \varepsilon^2 m_3 - \varepsilon(n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3)(m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3), \\ \frac{dm_1}{d\tau} + \varepsilon \frac{dm_2}{d\tau} + \varepsilon^2 \frac{dm_3}{d\tau} = n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3 + \varepsilon(n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3)(m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3). \end{cases} \quad (6)$$

Выделяя теперь в (6) слагаемые с $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$, будем иметь:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \frac{dn_1}{d\tau} = -m_1, \\ \frac{dm_1}{d\tau} = n_1, \end{cases} \quad (7)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \frac{dn_2}{d\tau} = -m_2 - n_1 m_1, \\ \frac{dm_2}{d\tau} = n_2 + n_1 m_1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} \frac{dn_3}{d\tau} = -m_3 - n_1 m_2 - n_2 m_1, \\ \frac{dm_3}{d\tau} = n_3 + n_2 m_1 + n_1 m_2. \end{cases} \quad (9)$$

Система уравнений (7) имеет решение:

$$\begin{cases} m_1(\tau) = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau, \\ n_1(\tau) = -C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau. \end{cases}$$

Решение уравнений (8) запишется в виде:

$$\begin{cases} m_2(\tau) = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau + \left(\frac{1}{3} C_1^2 - \frac{1}{3} C_2^2 + \frac{1}{3} C_1 C_2 \right) \cos 2\tau + \\ + \left(\frac{2}{3} C_1 C_2 - \frac{1}{6} C_1^2 + \frac{1}{6} C_2^2 \right) \sin 2\tau, \\ n_2(\tau) = -C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau + \left(\frac{1}{3} C_1 C_2 - \frac{1}{3} C_1^2 + \frac{1}{3} C_2^2 \right) \cos 2\tau + \\ + \left(-\frac{1}{6} C_1^2 + \frac{1}{6} C_2^2 - \frac{2}{3} C_1 C_2 \right) \sin 2\tau. \end{cases}$$

Решение системы (9) имеет вид:

$$\begin{cases} m_3(\tau) = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau + \left(\frac{1}{24} C_1^3 + \frac{1}{24} C_1 C_2^2 + \left(-\frac{1}{12} C_2^3 - \frac{1}{12} C_1^2 C_2 \right) \tau \right) \cos \tau + \\ + \left(\frac{1}{24} C_2^3 + \frac{1}{24} C_1^2 C_2 + \left(\frac{1}{12} C_1^3 + \frac{1}{12} C_1 C_2^2 \right) \tau \right) \sin \tau + \left(\frac{2}{3} C_1 C_2 - \frac{2}{3} C_2^2 + \frac{2}{3} C_1^2 \right) \cos 2\tau + \\ + \left(\frac{4}{3} C_1 C_2 + \frac{1}{3} C_2^2 - \frac{1}{3} C_1^2 \right) \sin 2\tau + \left(\frac{1}{16} C_1^3 - \frac{1}{8} C_2^3 + \frac{3}{8} C_1^2 C_2 - \frac{3}{16} C_1 C_2^2 \right) \cos 3\tau + \\ + \left(\frac{1}{16} C_2^3 - \frac{1}{8} C_1^3 + \frac{3}{8} C_1 C_2^2 - \frac{3}{16} C_1^2 C_2 \right) \sin 3\tau. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & + \left(-\frac{1}{8}C_1^3 - \frac{1}{16}C_2^3 + \frac{3}{16}C_1^2C_2 + \frac{3}{8}C_1C_2^2 \right) \sin 3\tau, \\ n_3(\tau) = & -C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau + \left(\left(\frac{1}{12}C_1^3 + \frac{1}{12}C_1C_2^2 \right) \tau + \frac{1}{24}C_2^3 + \frac{1}{12}C_1^3 + \frac{1}{24}C_1^2C_2 + \right. \\ & + \left. \frac{1}{12}C_1C_2^2 \right) \cos \tau + \left(\left(\frac{1}{12}C_2^3 + \frac{1}{12}C_1^2C_2 \right) \tau - \frac{1}{24}C_1^3 + \frac{1}{12}C_2^3 - \frac{1}{24}C_1C_2^2 + \frac{1}{12}C_1^2C_2 \right) \sin \tau + \\ & + \left(\frac{2}{3}C_1C_2 + \frac{2}{3}C_2^2 - \frac{2}{3}C_1^2 \right) \cos 2\tau + \left(-\frac{4}{3}C_1C_2 + \frac{1}{3}C_2^2 - \frac{1}{3}C_1^2 \right) \sin 2\tau + \left(-\frac{1}{8}C_1^3 + \frac{1}{16}C_2^3 - \right. \\ & - \left. \frac{3}{16}C_1^2C_2 + \frac{3}{8}C_1C_2^2 \right) \cos 3\tau + \left(\frac{1}{16}C_1^3 + \frac{1}{8}C_2^3 - \frac{3}{8}C_1^2C_2 - \frac{3}{16}C_1C_2^2 \right) \sin 3\tau. \end{aligned} \right.$$

Подставим полученные решения систем (7)–(9) в (5), а затем значения $\tilde{X}_1(\tau)$, $\tilde{X}_2(\tau)$ в (2), учитывая при этом, что $\tau = pt + \phi$, $p = \frac{a_2b_2}{b_1} = \frac{a_1b_1}{b_2}$. Данные преобразования приводят к окончательным соотношениям:

$$\left\{ \begin{aligned} X_1(t) = & \frac{a_2}{b_1} + \left(-C_1 - \varepsilon C_1 - \varepsilon^2 C_1 + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{1}{12}C_2^3 + \frac{1}{12}C_1^2C_2 \right) (pt + \phi) - \frac{1}{24}C_1^3 + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{12}C_2^3 - \frac{1}{24}C_1C_2^2 + \frac{1}{12}C_1^2C_2 \right) \right) \sin(pt + \phi) + \left(C_2 + \varepsilon C_2 + \varepsilon^2 C_2 + \right. \\ & + \left. \varepsilon^2 \left(\left(\frac{1}{12}C_1^3 + \frac{1}{12}C_1C_2^2 \right) (pt + \phi) + \frac{1}{24}C_2^3 + \frac{1}{12}C_1^3 + \frac{1}{24}C_1^2C_2 + \frac{1}{12}C_1C_2^2 \right) \right) \cdot \\ & \cdot \cos(pt + \phi) + \left(\varepsilon \left(-\frac{1}{6}C_1^2 + \frac{1}{6}C_2^2 - \frac{2}{3}C_1C_2 \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{4}{3}C_1C_2 + \frac{1}{3}C_2^2 - \frac{1}{3}C_1^2 \right) \right) \cdot \\ & \cdot \sin(2pt + 2\phi) + \left(\varepsilon \left(\frac{1}{3}C_1C_2 - \frac{1}{3}C_1^2 + \frac{1}{3}C_2^2 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{2}{3}C_1C_2 + \frac{2}{3}C_2^2 - \frac{2}{3}C_1^2 \right) \right) \cdot \\ & \cdot \cos(2pt + 2\phi) + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{8}C_1^3 + \frac{1}{16}C_2^3 - \frac{3}{16}C_1^2C_2 + \frac{3}{8}C_1C_2^2 \right) \cos(3pt + 3\phi) + \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{16}C_1^3 + \frac{1}{8}C_2^3 - \frac{3}{8}C_1^2C_2 - \frac{3}{16}C_1C_2^2 \right) \sin(3pt + 3\phi), \\ X_2(t) = & \frac{a_1}{b_2} + \left(C_1 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_1 + \varepsilon^2 \left(\left(-\frac{1}{12}C_2^3 - \frac{1}{12}C_1^2C_2 \right) (pt + \phi) + \frac{1}{24}C_1^3 + \frac{1}{24}C_1C_2^2 \right) \right) \cdot \\ & \cdot \cos(pt + \phi) + \left(C_2 + \varepsilon C_2 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{1}{12}C_1^3 + \frac{1}{12}C_1C_2^2 \right) (pt + \phi) + \frac{1}{24}C_2^3 + \frac{1}{24}C_1^2C_2 \right) \right) \cdot \\ & \cdot \sin(pt + \phi) + \left(\varepsilon \left(\frac{1}{3}C_1^2 - \frac{1}{3}C_2^2 + \frac{1}{3}C_1C_2 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{2}{3}C_1C_2 - \frac{2}{3}C_2^2 + \frac{2}{3}C_1^2 \right) \right) \cdot \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left| \begin{aligned} & \cdot \cos(2pt + 2\phi) + \left(\varepsilon \left(\frac{2}{3} C_1 C_2 - \frac{1}{6} C_1^2 + \frac{1}{6} C_2^2 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{4}{3} C_1 C_2 + \frac{1}{3} C_2^2 - \frac{1}{3} C_1^2 \right) \right) \\ & \cdot \sin(2pt + 2\phi) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{16} C_1^3 - \frac{1}{8} C_2^3 + \frac{3}{8} C_1^2 C_2 - \frac{3}{16} C_1 C_2^2 \right) \cos(3pt + 3\phi) + \\ & + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{8} C_1^3 - \frac{1}{16} C_2^3 + \frac{3}{16} C_1^2 C_2 + \frac{3}{8} C_1 C_2^2 \right) \sin(3pt + 3\phi). \end{aligned} \right|$$

Если ввести следующие обозначения, то:

$$A_1 = C_2 + \varepsilon C_2 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{24} C_2^3 + \frac{1}{12} C_1^3 + \frac{1}{24} C_1^2 C_2 + \frac{1}{12} C_1 C_2^2 \right),$$

$$A_2 = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{12} C_1^3 + \frac{1}{12} C_1 C_2^2 \right),$$

$$A_3 = -C_1 - \varepsilon C_1 - \varepsilon^2 C_1 + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{24} C_1^3 + \frac{1}{12} C_2^3 - \frac{1}{24} C_1 C_2^2 + \frac{1}{12} C_1^2 C_2 \right),$$

$$A_4 = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{12} C_2^3 + \frac{1}{12} C_1^2 C_2 \right),$$

$$A_5 = \varepsilon \left(\frac{1}{3} C_1 C_2 - \frac{1}{3} C_1^2 + \frac{1}{3} C_2^2 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{2}{3} C_1 C_2 + \frac{2}{3} C_2^2 - \frac{2}{3} C_1^2 \right),$$

$$A_6 = \varepsilon \left(-\frac{1}{6} C_1^2 + \frac{1}{6} C_2^2 - \frac{2}{3} C_1 C_2 \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{4}{3} C_1 C_2 + \frac{1}{3} C_2^2 - \frac{1}{3} C_1^2 \right),$$

$$A_7 = \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{8} C_1^3 + \frac{1}{16} C_2^3 - \frac{3}{16} C_1^2 C_2 + \frac{3}{8} C_1 C_2^2 \right),$$

$$A_8 = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{16} C_1^3 + \frac{1}{8} C_2^3 - \frac{3}{8} C_1^2 C_2 - \frac{3}{16} C_1 C_2^2 \right),$$

$$B_1 = C_1 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_1 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{24} C_1^3 + \frac{1}{24} C_1 C_2^2 \right),$$

$$B_2 = \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{12} C_2^3 - \frac{1}{12} C_1^2 C_2 \right),$$

$$B_3 = C_2 + \varepsilon C_2 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{24} C_2^3 + \frac{1}{24} C_1^2 C_2 \right),$$

$$B_4 = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{12} C_1^3 + \frac{1}{12} C_1 C_2^2 \right),$$

$$B_5 = \varepsilon \left(\frac{1}{3} C_1^2 - \frac{1}{3} C_2^2 + \frac{1}{3} C_1 C_2 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{2}{3} C_1 C_2 - \frac{2}{3} C_2^2 + \frac{2}{3} C_1^2 \right),$$

$$B_6 = \varepsilon \left(\frac{2}{3} C_1 C_2 - \frac{1}{6} C_1^2 + \frac{1}{6} C_2^2 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{4}{3} C_1 C_2 + \frac{1}{3} C_2^2 - \frac{1}{3} C_1^2 \right),$$

$$B_7 = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{16} C_1^3 - \frac{1}{8} C_2^3 + \frac{3}{8} C_1^2 C_2 - \frac{3}{16} C_1 C_2^2 \right),$$

$$B_8 = \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{8} C_1^3 - \frac{1}{16} C_2^3 + \frac{3}{16} C_1^2 C_2 + \frac{3}{8} C_1 C_2^2 \right).$$

тогда решение (10) системы уравнений (1) можно записать в компактной форме:

$$\begin{cases} X_1(t) = \frac{a_2}{b_1} + (A_1 + A_2(pt + \phi)) \cos(pt + \phi) + (A_3 + A_4(pt + \phi)) \sin(pt + \phi) + \\ + A_5 \cos 2(pt + \phi) + A_6 \sin 2(pt + \phi) + A_7 \cos 3(pt + \phi) + A_8 \sin 3(pt + \phi), \\ X_2(t) = \frac{a_1}{b_2} + (B_1 + B_2(pt + \phi)) \cos(pt + \phi) + (B_3 + B_4(pt + \phi)) \sin(pt + \phi) + \\ + B_5 \cos 2(pt + \phi) + B_6 \sin 2(pt + \phi) + B_7 \cos 3(pt + \phi) + B_8 \sin 3(pt + \phi). \end{cases} \quad (11)$$

Отметим, что различные варианты рассматриваемой модели и сходных с ней связаны с нелинейными системами дифференциальных уравнений. В силу громоздких технических вычислений исследователи приводят приближенное решение системы (1), полученное численными методами. Например, в [8] представлено приближенное решение (1), при получении которого в (5) не учитывались третьи слагаемые. По сравнению с решениями, представленными с помощью численных методов, приведенные на рисунке 1 графики функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$. Из (11) при $a_1 = a_2 = 0,5$; $b_1 = b_2 = 0,001$; $C_1 = C_2 = 1,0$; $\varepsilon = 0,002$; $\phi = 0$ иллюстрируют решение, полученное в статье аналитически.

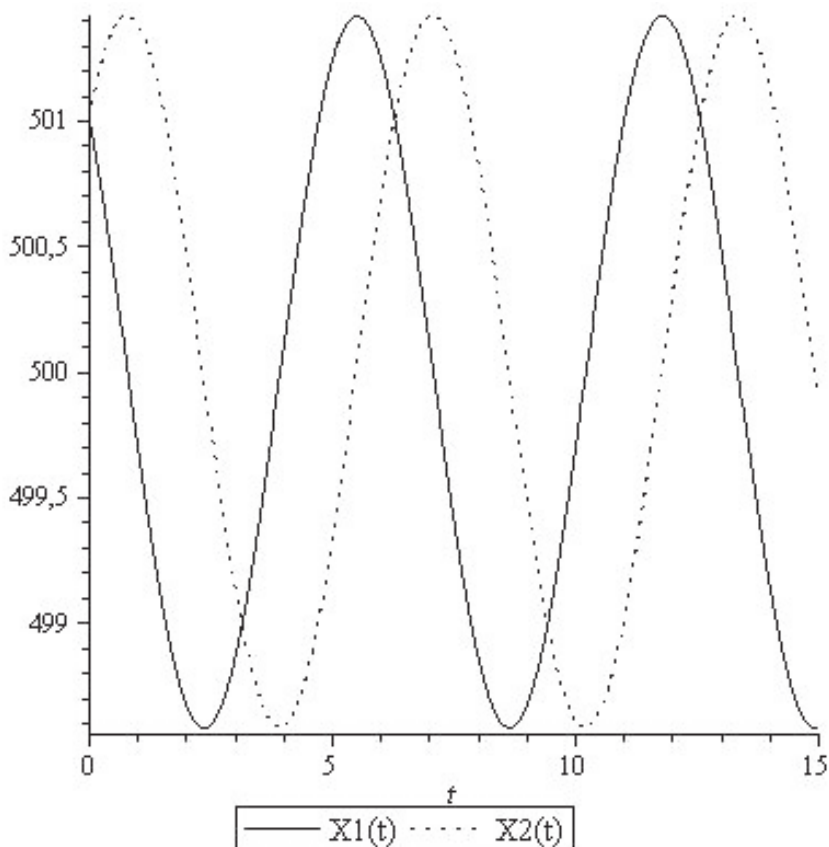


Рис. 1. Графики функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$

Литература

1. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит, 2010. 400 с.
2. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: пер. с франц. М.: Наука, 1976. 288 с.
3. Комаров М.А., Осипов Г.В., Петров В.С. Конкурентная динамика живых систем: учебно-метод. пособие. Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2010. 63 с.
4. Попов Н.И., Адиганова Н.А. Об одной математической модели конкуренции двух популяций // Новая наука: стратегии и векторы развития: мат-лы Международной научно-практической конференции. Ч. 3. Стерлитамак: АМИ, 2016. С. 40–44.
5. Рабинович М.И., Мюезинолу М.К. Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная деятельность // Успехи физических наук. 2010. № 4. С. 371–387.
6. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. М.–Ижевск: РХД, 2002. 232 с.
7. Трубецков Д.И. Феномен математической модели Лотки – Вольтерры и сходных с ней // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19. № 2. С. 69–88.

8. Фунтов А.А. О приближенном аналитическом решении уравнений Лотки-Вольтерры // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 19. № 2. 2011. С. 89–92.
9. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986. 243 с.
10. Lotka A. Elements of Physical Biology. Baltimore, 1925. Reprinted by Dover in 1956 as Elements of Mathematical Biology.

Literatura

1. Bratus' A.S., Novozhilov A.S., Platonov A.P. Dinamicheskie sistemy' i modeli biologii. M.: Fizmatlit, 2010. 400 s.
2. Vol'terra V. Matematicheskaya teoriya bor'by' za sushhestvovanie: per. s francz. M.: Nauka, 1976. 288 s.
3. Komarov M.A., Osipov G.V., Petrov V.S. Konkurentnaya dinamika zhivy'x sistem: uchebno-metod. posobie. N. Novgorod: Nizhegorodskij gosuniversitet. 2010. 63 s.
4. Popov N.I., Adiganova N.A. Ob odnoj matematicheskoy modeli konkurencii dvux populyacij // Novaya nauka: strategii i vektory' razvitiya: mat-ly' Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Ch. 3. Sterlitamak: AMI, 2016. S. 40–44.
5. Rabinovich M.I., Myuezinolu M.K. Nelinejnaya dinamika mozga: e'mocii i intellektual'naya deyatel'nost' // Uspexi fizicheskix nauk. 2010. № 4. S. 371–387.
6. Rznichenko G.Yu. Lekcii po matematicheskim modelyam v biologii. M.–Izhevsk: RXD, 2002. 232 s.
7. Trubeczkov D.I. Fenomen matematicheskoy modeli Lotki – Vol'terry' i sxodny'x s nej // Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelinejnaya dinamika. 2011. T. 19. № 2. S. 69–88.
8. Funtov A.A. O priblizhennom analiticheskom reshenii uravnenij Lotki-Vol'terry' // Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelinejnaya dinamika. T. 19. № 2. 2011. S. 89–92.
9. E'rrousmi D., Plejs K. Oby'knovenny'e differencial'ny'e uravneniya. Kachestvennaya teoriya s prilozheniyami. M.: Mir, 1986. 243 s.
10. Lotka A. Elements of Physical Biology. Baltimore, 1925. Reprinted by Dover in 1956 as Elements of Mathematical Biology.

*N.I. Popov,
N.A. Adiganova*

On one Mathematical Model of the Biological Problem “Predator-victim”

For one mathematical model “predator-prey” an analytical solution of the Lotka – Volterra equations is obtained.

Keywords: predator-prey model; analytical solution.