

В.А. Бубнов

Методический анализ гидродинамической структуры вихревой нити

В общем курсе физики мало внимания уделяется теории вихревых движений. Однако в рамках межпредметных связей между общим курсом физики и дисциплиной «Физика природных явлений», изучаемой студентами-географами, тема «Вихревая нить, моделирующая динамические явления в смерчах и ураганах», представляется актуальной. В связи с этим в данной работе описана методика анализа структуры вихревой нити и показано соответствие течений в вихревой нити течениям в реальных ураганах.

Ключевые слова: изолированный вихрь; гидродинамические характеристики; натурные измерения в ураганах; вихревая нить.

В гидродинамике имеет место модель течения, называемая вихревой нитью. В лабораторных условиях вихревая нить наблюдается как цилиндрическое изолированное вихревое образование, в котором преобладает по величине окружная скорость v , а вторичные течения, определяемые радиальной скоростью u и осевой w , ничтожно малы. В рамках таких предположений гидродинамическая структура рассматриваемого вихревого движения такова: внутри нити скорость $v = \omega r$ (где ω — угловая скорость, а r — текущий радиус вихря); вне нити $v = \frac{const}{r}$.

Таким образом, внутри вихревой нити окружная скорость возрастает до максимальной v_0 на границе, определяемой радиусом r_0 , а далее с увеличением радиуса r убывает по закону $v = \frac{const}{r}$. Если в цилиндрической системе координат вычислить проекцию на ось z ротора скорости по формуле:

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}, \quad (1)$$

то оказывается, что внутри нити $\omega_z = 2 \omega$, а вне — $\omega_z = 0$. Последнее означает, что в данном вихревом течении сосуществуют вихревое и потенциальное течения.

Изложенная модель вихревой нити часто используется для грубого анализа гидродинамической структуры реальных смерчей и ураганов.

Именно поэтому задача о взаимодействии вихревой нити с плоскостью привлекала многих исследователей (см.: [8]).

При решении этой задачи в рамках уравнений Навье – Стокса к указанным уравнениям, представленным в цилиндрической системе координат, добавлялись следующие граничные условия [8]:

$$\left. \begin{aligned} u = v = w = 0, \text{ при } z = 0, \\ v = \frac{c_0}{r}, p = p_\infty - \rho \frac{c_0^2}{2r^2}, \text{ при } z = \infty, \\ u = w = 0, \text{ при } r = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Качественный анализ решений этой задачи в указанной постановке, проделанный автором монографии [8], привел к тому, что при числах Рейнольдса, превышающих восемь, ограниченных решений не существует. Численные расчеты этой задачи [8] показали, что ограниченные решения имеют место для чисел Рейнольдса, меньших числа 5,5.

Однако в работах [1; 2] показано, что все исследователи, цитированные в [8], пренебрегли одной из асимптотик, которая имеет место для уравнения определяющего циркуляцию скорости.

Учет обеих асимптотик для циркуляции скорости привел как к монотонным, так и немонотонным решениям, которые имеют место при любых числах Рейнольдса (см.: [1; 2]). Наличие же монотонных и немонотонных решений, допускаемых уравнениями Навье – Стокса при конкретных числах Рейнольдса, свидетельствует о невозможности точного анализа характера взаимодействия вихревой нити с плоскостью в рамках указанных уравнений.

Различные способы уточнения уравнений Навье – Стокса, проделанные автором, описаны в [3; 4; 7; 12].

Сущность этих способов такова.

Вывод уравнений движения жидкости или газа основывается на применении второго закона Ньютона к анализу движения частицы жидкости или газа. Однако формульный вид этого закона не был дан Ньютоном. Им была дана только словесная формулировка указанного закона, согласно которой изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению, по которому эта сила действует.

В рамках этого определения автором (см.: [4–7]) применительно к частице жидкости второй закон Ньютона написан в следующем виде:

$$c \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}, \quad (3)$$

где m — масса частицы, t — время, \vec{V} — вектор гидродинамической скорости, составляющие которого суть u , v , w вдоль осей x , y , z — соответственно, и, наконец, \vec{F} есть сила, вызывающая изменение количества движения.

В рамках общепринятой системы единиц коэффициент пропорциональности c суть отвлеченное число, оно может быть как положительное, так и отрицательное. В работе [6] автором доказано, что $c > 0$ в ускорительных движениях и $c < 0$ — в замедленных.

Отличие формы (3) второго закона Ньютона от общепринятой состоит не только в том, что $c \neq 1$, но и в том, что масса m в данном рассмотрении есть величина переменная. Кроме того, применительно к частице жидкости производная, стоящая слева в (3), рассматривается в форме оператора Эйлера, а именно:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4)$$

Учитывая сказанное, уравнение (3) переписываем так:

$$cm \frac{d\vec{V}}{dt} + c\vec{V} \frac{dm}{dt} = \vec{F}. \quad (5)$$

Теперь следует вычислить изменение массы во времени для движущейся частицы жидкости. Для этого предположим, что в формуле $m = \rho W = \rho dx dy dz$ изменяются со временем и плотность ρ , и объем W частицы жидкости. Тогда:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\rho W}{dt} = \rho \frac{dW}{dt} + W \frac{d\rho}{dt}. \quad (6)$$

Для вычисления изменения объема W введем промежуточную величину:

$$\theta = \frac{W_0 - W_1}{W_0 \cdot \Delta t}, \quad (7)$$

а входящие в нее объемы W_0 и W_1 выразим через массы m_0 и m_1 , а также плотности ρ_0 и ρ_1 согласно общеизвестным формулам:

$$W_0 = \frac{m_0}{\rho_0}, \quad W_1 = \frac{m_1}{\rho_1}. \quad (8)$$

Далее считаем, что $m_0 = m_1 = m$, т. е. изменение плотности происходит только за счет изменения объема частицы. Теперь после подстановки (8) в (7) получаем:

$$\theta = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \Delta t} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (9)$$

Используем общеизвестное уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (10)$$

из которого следует:

$$\theta = -\operatorname{div}\vec{V} = -\varepsilon = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \quad (11)$$

Теперь вычисление объема W производим так:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{W_1 - W_0}{\Delta t} = -\frac{(W_0 - W_1) \cdot W_0}{W_0 \cdot \Delta t} = -W_0 \cdot \theta. \quad (12)$$

Формулы (7, 9–12) позволяют из (6) получить окончательное выражение для изменения массы во времени:

$$\frac{dm}{dt} = \rho\theta(W - W_0). \quad (13)$$

Разделим все величины в (5) на элементы объема W и учтем (13), тогда получим:

$$c\rho\frac{d\vec{V}}{dt} + c\left(1 - \frac{W}{W_0}\right)\rho\vec{V} \cdot \theta = \vec{P}. \quad (14)$$

Введем эмпирический параметр:

$$c_1 = c\left(1 - \frac{W}{W_0}\right), \quad (15)$$

который характеризует величину изменения объема частицы жидкости. После подстановки в уравнение (14) формул (11) и (15) получаем следующее соотношение:

$$c\rho\frac{dV}{dt} - c_1\rho\vec{V}\operatorname{div}\vec{V} = \vec{P}, \quad (16)$$

в котором левая часть приняла окончательный вид, а правая часть подлежит дальнейшим исследованиям в связи с установлением величины поверхностной силы \vec{P} .

Заметим, что между эмпирическими коэффициентами c и c_1 , в частном случае, имеет место следующая связь, для установления которой введем новую величину:

$$\beta = \frac{(W - W_0)}{2W - W_0} = c_1. \quad (17)$$

Тогда для c получим очевидное соотношение:

$$c = 1 - \beta = \frac{W}{2W - W_0}. \quad (18)$$

Полученные таким образом соотношения для c и c_1 позволяют уравнению (16) придать новую форму:

$$(1 - \beta) \rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \beta \rho \vec{V} \operatorname{div} \vec{V} = P. \quad (19)$$

Для вычисления вектора поверхностной силы \vec{P} используем общеизвестное его представление, именно:

$$\begin{aligned} \vec{P} = & \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \\ & + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ суть орты координатных осей x, y, z соответственно $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — нормальные напряжения, действующие на поверхности частицы жидкости, а $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ являются поверхностными касательными напряжениями.

Теперь, учитывая вышеприведенные составляющие вектора \vec{P} , переписываем проекции на координатные оси уравнения (16) и получаем:

$$\left. \begin{aligned} c\rho \frac{du}{dt} - c_1 \rho u \cdot \varepsilon &= \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ c\rho \frac{dv}{dt} - c_1 \rho v \cdot \varepsilon &= \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ c\rho \frac{dw}{dt} - c_1 \rho w \cdot \varepsilon &= \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Система уравнений (20) является аналогом векторного уравнения (3) применительно к частице жидкости, и она является исходной для вывода уравнений гидродинамики.

Проблема вывода указанных уравнений заключается в установлении связи между напряжениями, входящими в правую часть системы (20), и скоростями деформационного движения u, v, w . Первый шаг в решении этой проблемы состоит в выделении из нормальных напряжений гидродинамического давления p . Это делается в гидродинамике с помощью следующих формул:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x, \sigma_y = -p + \sigma'_y, \sigma_z = -p + \sigma'_z.$$

Далее в рамках гипотезы Навье – Стокса устанавливаем линейную зависимость между напряжениями и скоростями u, v, w следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \lambda \varepsilon + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ \sigma'_y &= \lambda \varepsilon + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\ \sigma'_z &= \lambda \varepsilon + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Здесь, как и ранее, скорость объемного расширения определена так:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{V}, \quad (22)$$

а параметры λ и μ называют объемной и сдвиговой вязкостями.

Система уравнений (20) после подстановки в нее формул (21) становится определенной относительно скоростей u, v, w и принимает следующий вид [4; 8]:

$$\left. \begin{aligned} c\rho \frac{du}{dt} - c_1 \rho u \cdot \varepsilon &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \\ c\rho \frac{dv}{dt} - c_1 \rho v \cdot \varepsilon &= -\frac{\partial p}{\partial y} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \\ c\rho \frac{dw}{dt} - c_1 \rho w \cdot \varepsilon &= -\frac{\partial p}{\partial z} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \mu \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где дополнительно введен так называемый оператор набла квадрат:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для записи системы (23) в компактном векторном виде введен оператор набла:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Этот оператор есть вектор, поэтому конвективную производную оператора Эйлера (4) можно представить как скалярное произведение вектора \vec{V} на вектор ∇ , т. е.:

$$u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = (\vec{V} \cdot \nabla).$$

Теперь оператор полной производной принимает более компактный вид:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V} \cdot \nabla). \quad (24)$$

Операторы «набла» и «набла квадрат» и выражение (24) позволяют системе (23) представить в форме одного векторного уравнения:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + c\rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - c_1 \rho \vec{V} \cdot \operatorname{div} \vec{V} = \\ = -\nabla \cdot p + (\lambda + \mu) \nabla \cdot \operatorname{div} \vec{V} + \mu \nabla^2 \vec{V}. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее, для определения величины давления p в гидродинамическом потоке введем величину p_m как среднее арифметическое нормальных напряжений согласно формуле:

$$p_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p + \frac{1}{3}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z). \quad (26)$$

Учитывая в (21) выражения для $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$, получаем, что:

$$\frac{1}{3}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon. \quad (27)$$

Чтобы приравнять давление p_m гидродинамическому давлению p , Стокс в правой части (27) определил объемную вязкость λ через сдвиговую вязкость μ так:

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu. \quad (28)$$

Уравнение (25) в данном случае переписывается так (см [8]):

$$\begin{aligned} c \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + c (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - c_1 \rho \vec{V} \cdot \operatorname{div} \vec{V} = \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot p + \frac{1}{3} \nu \nabla \cdot \operatorname{div} \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{V}, \end{aligned} \quad (29)$$

где через ν обозначена кинематическая вязкость.

Произведем аналогичные вычисления над правой частью в (19), тогда вместо уравнения (19) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 (1-\beta)\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (1-\beta)(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} - \beta \vec{V} \operatorname{div} \vec{V} = \\
 = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot p + \frac{1}{3} \nu \nabla \cdot \operatorname{div} \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{V}.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Уравнение (30) является частным случаем уравнения (29), так как согласно формулам (17) и (18) параметр β есть частная комбинация параметров c и c_1 .

В связи с уравнением (30) интересно заметить следующее. В 1948 году в работе [11] профессор Московского университета А.С. Предводителей предложил следующую новую форму уравнений гидродинамики:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (1-\beta)(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} - \beta \vec{V} \operatorname{div} \vec{V} = \\
 = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot p + (2-\gamma)\nu \nabla \cdot \operatorname{div} \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{V}.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Это уравнение при $\gamma = \frac{5}{3}$ и $\beta = 0$ переходит в уравнение Навье – Стокса.

Параметр β был назван А.С. Предводителейым параметром неидеальной сплошности. Очевидно, что в стационарных течениях уравнение Предводителейова (31) совпадает с уравнением (30).

Для анализа гидродинамической структуры вихревой нити будем использовать уравнение (29), когда $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ (жидкость несжимаемая) и скорость \vec{V} не зависит от времени. При этих предположениях указанное уравнение упрощается так:

$$c(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot p + \nu \nabla^2 \vec{V}.
 \tag{32}$$

Оказывается, что к таковой форме сводится уравнение Осборна Рейнольдса для осредненных скоростей, если в нем турбулентные напряжения выразить через квадраты и попарные произведения составляющих скорости осредненного движения [3]. Последнее означает, что кинематическую вязкость ν в уравнении (32) можно заменить кинематической турбулентной вязкостью.

Согласно полуэмпирическим представлениям теории турбулентности, когда имеет место двумерное движение

$$\bar{u} = \bar{u}(y), \bar{v} = 0,$$

турбулентное касательное напряжение τ_{xy} определяется так:

$$-\rho \overline{u'v'} = \tau_{xy} = \rho \varepsilon \frac{du}{dy},
 \tag{33}$$

где ε — кинематическая турбулентная вязкость, определяемая формулой:

$$\varepsilon = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|. \quad (34)$$

Здесь в (34) l — длина пути перемешивания, для которой Т. Карман предложил формулу:

$$l = \frac{\kappa \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|}{\left| \frac{d^2 u}{dy^2} \right|}. \quad (35)$$

При этом константа κ оказалась равной 0,4 в результате анализа турбулентных течений в трубах, проделанного Т. Карманом.

В цилиндрической системе координат формулы (33)–(35) требуют своего уточнения.

Действительно, напряжению τ_{xy} в прямоугольной системе координат x, y , в цилиндрической системе r, φ соответствует напряжение $\tau_{r\varphi}$, которое (см.: [12]) в предположении симметрии по углу φ определяется так:

$$\tau_{r\varphi} = \rho \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad (36)$$

где v — окружная скорость, а r — текущий радиус. Из сравнения формул (33) и (36) следует, что при переходе от прямоугольной системы координат

к цилиндрической необходимо выражение $\frac{du}{dy}$ заменить на $\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)$.

Произведем такую замену в (34) и (35) и получим для величины ε в цилиндрической системе координат следующие формулы:

$$\varepsilon = l^2 \left| \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right|, \quad l = \kappa \frac{\left| \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right|}{\left| \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \right|}. \quad (37)$$

Эта величина ε в [12] названа вихревой вязкостью.

В изолированных вихрях, к числу которых относится и вихревая нить, на границе взаимодействия вихря с окружающей средой, допускает смену

знака величина $\omega_z = \frac{1}{2}(\text{rot } \vec{V})$. Для учета этого обстоятельства примем, что:

$$v = v_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^n. \quad (38)$$

Теперь для ω_z будем иметь следующее выражение:

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = \frac{(1-n)v_0 r_0^n}{r^{n+1}}.$$

Отсюда видно, что при $n > 1$ и $r \rightarrow \infty$ величина ω_z стремится к нулю в области своих отрицательных значений.

После подстановки (38) в (37) получим выражение для вихревой вязкости:

$$\varepsilon = \frac{\kappa^2 v_0 r_0}{(n+1)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1}. \quad (39)$$

Здесь v_0 — максимальное значение окружной скорости, а r_0 — радиус этой скорости.

В монографии [12] радиус изолированного вихря определяется как радиус R , при котором величина ω_z изменяет знак. Теперь, чтобы избавиться от зависимости величины ε от r , введем понятие эффективной кинематической вязкости ν_0 как значения величины ε на границе изолированного вихря [6], т. е.:

$$\nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho} = \frac{\kappa^2 v_0 r_0}{(n+1)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1}, \quad (40)$$

а значение константы Кармана κ будем принимать равной 0,4 при проведении расчетов по (40).

Задачу о взаимодействии вихревой нити с плоскостью будем решать на основе уравнения (32), которое необходимо переписать в цилиндрической системе координат r, φ, z . Для этого через u, v, w обозначим составляющие вектора гидродинамической скорости на оси r, φ, z , тогда в условиях осевой симметрии уравнение (32) в проекциях на оси цилиндрической системы координат примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} c \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_0 \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right), \\ c \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} - w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \nu_0 \left(\Delta v - \frac{u}{r^2} \right), \\ c \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu_0 \Delta w, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где дополнительно обозначено:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

К системе (41) добавим уравнение неразрывности в форме $div\vec{V} = 0$, которое в цилиндрической системе координат, в условиях осевой симметрии, записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (42)$$

При обезразмеривании величин системы (41) необходимо иметь в виду, что в данной задаче нет характерной скорости, поэтому введем характерную циркуляцию c_0 с размерностью $\frac{M^2}{c}$.

Характерная циркуляция скорости c_0 позволяет от размерных скоростей u , v , w и давления p перейти к безразмерным скоростям \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} и давлению Π по формулам:

$$u = c_0 \frac{\bar{u}}{r}, v = c_0 \frac{\Phi}{r}, w = c_0 \frac{\bar{w}}{r}, \Pi = \frac{r^2(p - p_\infty)}{\rho c_0^2};$$

которые позволяют исходную систему (41) и уравнение (42) переписать так:

$$\left. \begin{aligned} c \left(u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{(u^2 + \Phi^2)}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{2\Pi}{r} + kr \nabla^2 u, \\ u \frac{\partial \Phi}{\partial r} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= kr \nabla^2 \Phi, \\ c \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{uw}{r} \right) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + kr \left(\nabla^2 w + \frac{w}{r^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Здесь черточки сверху над безразмерными величинами не написаны, через $k = \frac{v_0}{c_0}$ обозначена величина, являющаяся аналогом числа Рейнольдса, и оператор «набла квадрат», равный:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничные условия (2) теперь видоизменяются, а именно:

$$\left. \begin{aligned} u = \Phi = w = 0, \text{ при } z = 0, \\ \Phi = 1, \Pi = -\frac{1}{2}, \text{ при } z = \infty, \\ u = w = 0, \text{ при } r = 0, \\ u = \Phi = w = 0, \text{ при } r = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Система уравнений (43) в частных производных позволяет с помощью переменной

$$\eta = \frac{z}{r} \quad (45)$$

перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной η , если воспользоваться следующими формулами перехода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= -\frac{z}{r^2} \frac{d}{d\eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{z^2}{r^4} \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2z}{r^3} \frac{d}{d\eta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{r} \frac{d}{d\eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\eta^2}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими формулами перехода, получаем вместо системы (43):

$$\begin{aligned} c[(w - \eta u)u' - (u^2 + \Phi)] &= \\ = \eta \Pi' + 2\Pi + k[(1 + \eta^2)u'' + 3\eta u'] &, \end{aligned} \quad (46)$$

$$c(w - \eta u)\Phi' = k[(1 + \eta^2)\Phi'' + 3\eta\Phi'], \quad (47)$$

$$c[(w - \eta u)w' - uw] = -\Pi' + k[(1 + \eta^2)w'' + 3\eta w' + w], \quad (48)$$

$$w' = \eta u'. \quad (49)$$

Здесь штрих сверху над символом обозначает обыкновенную производную, как это принято в математическом анализе.

В соответствии с граничными условиями (44), переменная будет изменяться от нуля до бесконечности, а именно: при $\eta = 0$, $u = \Phi = w = 0$, а при $\eta = \infty$, $\Phi = 1$, $\Pi = -\frac{1}{2}$, $u = w = 0$.

Соотношение (49) позволяет проинтегрировать уравнение (48), в результате чего получаем:

$$\Pi = -cw(w - \eta u) + k\left[(1 + \eta^2)w' + \eta w\right] - \frac{1}{2}. \quad (50)$$

В этом выражении постоянная интегрирования принята равной $\left(-\frac{1}{2}\right)$,

чтобы удовлетворить условию: при $\eta = \infty$, давление $\Pi = -\frac{1}{2}$.

Введем новую переменную

$$x = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

и новую функцию

$$y = \frac{(w - \eta u)}{\sqrt{1+\eta^2}} = w\sqrt{1-x^2} - xu.$$

Тогда с помощью (49) нетрудно получить

$$u = -(1-x^2)y' - xy, \quad w = \sqrt{1-x^2}(y - xy'). \quad (51)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по x . Отметим, что y играет роль меридиональной функции тока, причем при подстановке (51) в (49) последнее удовлетворяется тождественно.

Теперь, после довольно длинных преобразований, уравнения (46) и (47) в новых переменных примут вид

$$\left. \begin{aligned} -k(1-x^2)^2 y''' &= 1 + c \left[y^2 - \Phi^2 - \frac{(1-x^2)}{2} (y^2)'' - x(y^2)' \right], \\ c(1-x^2)y\Phi' &= k(1-x^2)^2 \Phi'', \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

а граничные условия уточняются так

$$\left. \begin{aligned} y(0) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 0, \\ \Phi(0) = 0, \Phi(1) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Задача (52)–(53) относится к краевой, и ее решение будем получать методом интегральных соотношений академика А.А. Дородницына [9]. Для этого введем набор так называемых сглаживающих функций $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), левую и правую части системы (52) умножим на $f_n(x)$ и проинтегрируем по переменной x от нуля до единицы, после чего получим следующую систему интегральных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} & -k \int_0^1 f_n(x)(1-x^2)^2 y''' dx = \int_0^1 f_n(x) dx + \\ & + c \int_0^1 f_n(x) \left[y^2 - \Phi^2 - \frac{(1-x^2)}{2} (y^2)'' - x(y^2)' \right] dx, \\ & k \int_0^1 f_n(x)(1-x^2)^2 \Phi'' dx = c \int_0^1 f_n(x)(1-x^2) y \Phi' dx. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

При изучении системы (54) будем довольствоваться нулевым приближением, когда

$$f_0 = 1, \quad \Phi(x) = x + b_1 x(1-x^2), \quad y = a_1 x^2(1-x^2). \quad (55)$$

После подстановки (55) в (54) и последующего интегрирования будем иметь систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_1 и b_1

$$\left. \begin{aligned} 4ka_1 + \frac{4}{15} cb_1 = 1 - \frac{c}{3} + c \left(\frac{8}{105} a_1^2 - \frac{8}{105} b_1^2 \right), \\ \frac{8}{105} ca_1 + kb_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Теперь из второго уравнения системы (56) определяем

$$a_1 = -\frac{105k}{8c} b_1, \quad (57)$$

после чего первое уравнение в (56) переписывается так:

$$\left(\frac{8}{105} c - \frac{105k^2}{8c} \right) b_1^2 + \left(\frac{4}{15} c - \frac{105k^2}{2c} \right) b_1 - \left(1 - \frac{c}{3} \right) = 0. \quad (58)$$

Из (58) следует, что для любого k выбором соответствующего значения c можно вычислить b_1 , которое в общем случае может иметь два корня.

При переходе к переменным r и z дополнительное обезразмеривание гидродинамических величин необходимо произвести так:

$$\begin{aligned} r &= R\bar{r}, \quad z = R\bar{z}, \quad u = \frac{c_0}{R} \bar{u}, \quad v = \frac{c_0}{R} \bar{v}, \\ w &= \frac{c_0}{R} \bar{w}, \quad p - p_\infty = \frac{\rho c_0^2}{R^2} \Delta \bar{p}, \end{aligned}$$

где R — характерный радиус изолированного вихря.

В дальнейшем черта сверху над безразмерными величинами будет отброшена. С учетом рассматриваемого приближения отметим формулы для безразмерных гидродинамических величин

$$u = \frac{a_1 z r (z^2 - 2r^2)}{(z^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad v = \frac{(1 + b_1) r^2 z + z^3}{r (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$w = \frac{a_1 z^2 (2z^2 - r^2)}{(z^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\Delta \bar{p} = -\frac{c a_1^2 z^4 (2z^4 + z^2 r^2 - r^4)}{(z^2 + r^2)^5} + \frac{k a_1 z (2z^4 + 10z^2 r^2 - 2r^4)}{r^2 (z^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2r^2}. \quad (59)$$

Для сравнения изложенной теории с экспериментом обратимся к данным по реальным изолированным вихрям, к которым, в частности, относятся ураганы [12]. Известно, что в период от пятидесятих до семидесятых годов прошлого столетия американские исследователи с помощью авиации и измерительных приборов производили гидродинамические исследования в реальных ураганах (см.: [13]).

На рисунке 1 приведены радиальные профили, заимствованные из [13], окружных скоростей нескольких реальных ураганов. Из рисунка 1 следует, что окружная скорость v может иметь либо один максимум, либо два. Эти профили получены в течение полета самолета и представляют копии записей прибора в реальном времени, поэтому их линии имеют прерывистый характер. С целью математической обработки этих профилей на их основе воспроизводились плавные кривые, по которым вычислялись радиальные профили величины ω_z (см.: [12]).

Для сравнения изложенной теории с экспериментом выбран профиль окружной скорости урагана «Дейси». Рисунок 2 заимствован из [12], который представляет главные кривые профилей скорости v и завихренности ω_z для указанного урагана.

К сожалению, в [13] не указана высота, на которой воспроизведено изменение профиля окружной скорости урагана «Дейси», представленного на рисунке 1. Однако по этому рисунку можно определить, что максимальная окружная скорость этого урагана оказалась $v_0 = 59$ м/с на радиусе $r_0 = 1,8 \cdot 10^4$ м. Из этого же рисунка воспроизведена таблица зависимости окружной скорости от радиуса. Эта таблица была использована при построении радиального профиля безразмерной циркуляции (см. рис. 3).

В рамках формул (59) выражение для безразмерной циркуляции окружной скорости имеет вид:

$$\Phi(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{(1 + b_1) r^2 z + z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (60)$$

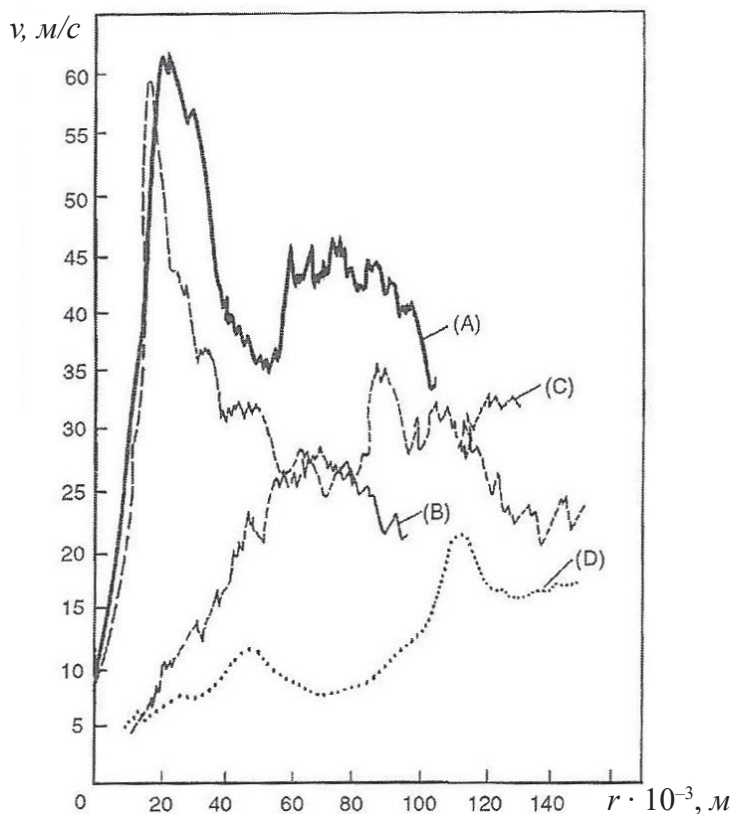


Рис. 1. Радиальные профили ураганов:

(A) — «Эстер», 16 сентября 1961 г.; (B) — «Дейси», 27 августа 1958 г.;
 (C) — «Джинджер», 26 сентября 1971 г.; (D) — «Хелен», 24 сентября 1958 г.

$\omega_z \cdot 10^4, 1/c$

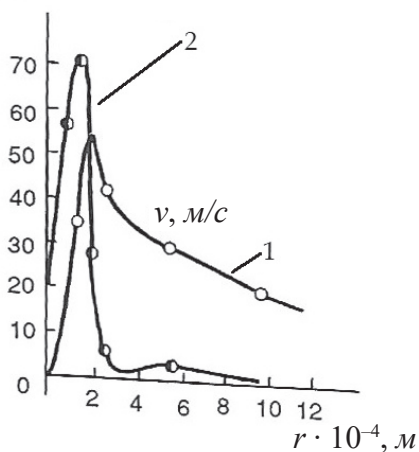


Рис. 2. Ураган «Дейси»:

1 — окружная скорость, 2 — величина ω_z

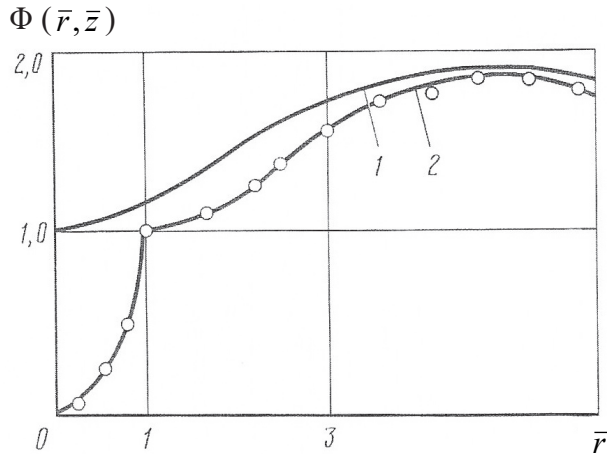


Рис. 3. Профили безразмерной циркуляции скорости для урагана «Дейси»:

1 — теория; 2 — ураган «Дейси»

Здесь черточки над безразмерными величинами в правой части (60) не использованы. Так как величина z для урагана «Дейси» неизвестна, то при наложении формулы (60) на реальный профиль циркуляции пришлось подбирать значения \bar{z} и b_1 . На рисунке 3 изображен теоретический профиль Φ вычисленный по (60) при $\bar{z} = 4,3$ и $b_1 = 4,3$. Из этого рисунка следует, что за максимумом тангенциальной скорости теория и эксперимент согласовываются как качественно, так и количественно.

Для определения эффективной вихревой кинематической вязкости необходимо знать радиальный профиль окружной скорости после его максимума. Числовая обработка данных рисунков 1 и 2 позволила этот профиль представить в форме таблицы 1.

Таблица 1

$\frac{r}{r_0}$	$\frac{v_0}{v}$, ураган «Дейси»	$\left(\frac{r_0}{r}\right)^{0,8}$ по (38)	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{v_0}{v}$, ураган «Дейси»	$\left(\frac{r_0}{r}\right)^{0,8}$ по (38)
1	1	1	3,33	0,4915	0,3820
1,11	0,8474	0,9199	3,61	0,4746	0,3581
1,39	0,7458	0,7684	3,89	0,4576	0,3373
1,67	0,6610	0,6635	4,17	0,4237	0,3191
1,94	0,5763	0,5885	4,44	0,4068	0,3034
2,22	0,5593	0,5283	4,72	0,3898	0,2890
2,5	0,5424	0,4804	5,00	0,3729	0,2759
2,78	0,5254	0,4413	5,28	0,3390	0,2642
3,05	0,5085	0,4098	5,55	0,3220	0,2598

При анализе этой таблицы следует иметь в виду, что экспериментальный профиль окружной скорости получен с некоторой неизвестной погрешностью. С учетом этого замечания следует признать, что радиальный профиль окружной скорости урагана «Дейси» описывается формулой (38) при $n = 0,8$.

В [12] показано, что смерчи и ураганы находятся в устойчивом состоянии и обладают огромной разрушительной силой тогда, когда радиальный профиль ω_z имеет область отрицательных значений наряду с областью положительных значений. В данном случае, когда $n = 0,8$, радиальный профиль ω_z для урагана «Дейси» не имеет области своих отрицательных значений (см. рис. 2), так как в период измерений ураган находился в стадии неполной зрелости [13]. Но из рисунка 2 следует, что при $R = 9 \cdot 10^4$ величина ω_z практически равна нулю, поэтому эту величину примем за радиус рассматриваемого изолированного вихря.

Итак, для вычисления вихревой вязкости имеем: $v_0 = 59$ м/с, $r_0 = 1,8 \cdot 10^4$, $R = 9 \cdot 10^4$ м, $n = 0,8$, $\kappa = 0,4$. Подстановка этих данных в (40) приводит к величине $v_0 = 12,804 \cdot 10^4$ м/с, вследствие чего вихревое число Рейнольдса, вычисленное как $Re_0 = \frac{v_0 r_0}{\nu_0}$, оказывается равным 8,3 (см.: [12]).

Теперь вспоминаем, что $k = \frac{1}{Re_0}$, задаваясь числами $Re_0 = 8,3$ и $b_1 = 0,4$, ре-

шаем уравнение (58) относительно эмпирической константы c . После вычисления величины c из уравнения (57) получаем числовое значение a_1 . Результаты таких расчетов сведены в таблицу 2.

Таблица 2

b_1	4,3	4,3
c	1,7170	-1,3709
a_1	-3,9601	4,9601

Уравнение (58) оказалось квадратичным относительно величины c , поэтому эта величина имеет два значения — положительное и отрицательное, соответственно, два значения имеет и a_1 .

Данные таблицы 2 позволяют произвести вычисления гидродинамических величин по формулам (59).

Из анализа данных таблицы 2 возникает вопрос о физическом смысле отрицательного значения эмпирической константы c . В [6]–[7] автором доказано, что отрицательные значения c описывают замедленные движения в рамках второго закона Ньютона, а положительные значения c — ускорительные.

В рассматриваемой задаче определить физический смысл константы c поможет анализ выражения для перепада давления $\Delta \bar{p}$, которое приведено в наборе формул (59). Действительно, константа c является множителем первого слагаемого в выражении для $\Delta \bar{p}$. Это слагаемое при определенных

значениях \bar{z} может при разных значениях \bar{r} давать основной вклад в числовые значения $\Delta\bar{p}$, и число c будет определять знак этого вклада.

Действительно, расчеты $\Delta\bar{p}$ по (59) при $c = -1,3709$ показывают, что при $\bar{z} = 1$ вблизи максимума окружной скорости величина $\Delta\bar{p}$ положительна, далее она заходит в отрицательную область и затем стремится к нулю. С ростом же значений \bar{z} исчезает область отрицательных значений $\Delta\bar{p}$, т. е. внутри вихря имеет место превышение давления. В метеорологии такое вращательное движение называется антициклоническим. Аналогичные расчеты $\Delta\bar{p}$ при $c = 1,7170$ показывают, что внутри вихря давление меньше давления в окружающей среде. Это — пример циклонического вращения.

Таким образом, для правильного восстановления гидродинамической структуры урагана, кроме профиля окружной скорости, необходимо иметь профиль $\Delta\bar{p}$, который определит тип вращения в вихре.

Ранее в [12] показано, что в изолированных вихрях возникают волны давления, направленные вдоль вертикальной оси. Для исследования этого обстоятельства профили $\Delta\bar{p}$ из (59) вычислялись для пятнадцати значений \bar{z} . Далее при фиксированных радиусах по этим высотам вычислялись $\Delta\bar{p}_{cp}$ (среднее значения), после чего строились графики (см. рис. 4 и 5) величин $(\Delta\bar{p} - \Delta\bar{p}_{cp})$ как функции \bar{z} при фиксированных \bar{r} . Расчеты показали, что величина $(\Delta\bar{p} - \Delta\bar{p}_{cp})$ как функция \bar{z} имеет колебательный характер вблизи радиуса урагана ($\bar{r} > 4$), а вблизи оси вихря ($\bar{r} < 4$) колебательный характер исчезает (см. рис. 4 и 5).

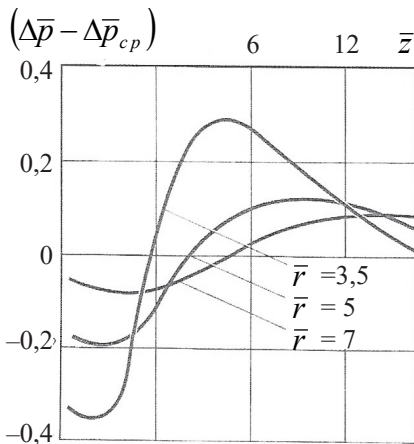


Рис. 4. Волны давления (антициклоническое вращение):

$$Re_0 = 8,3; b_1 = 4,3, \\ c = -1,3709; a_1 = 4,9601$$

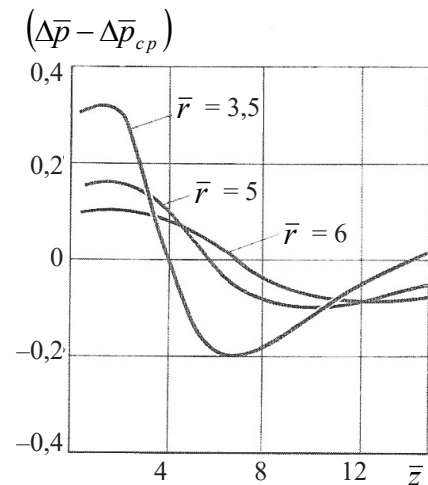


Рис. 5. Волны давления (циклоническое вращение):

$$Re_0 = 8,3; b_1 = 4,3, \\ c = 1,7170; a_1 = -3,9601$$

Расчеты и графики на указанных рисунках свидетельствуют о различии характера изменения величины $(\Delta\bar{p} - \Delta\bar{p}_{cp})$ от координаты \bar{z} при антициклоническом и циклоническом вращениях.

Заключение

При составлении из данного методического материала контента лекции необходимо сложные математические выкладки перенести на самостоятельную работу студентов, а фактический материал изложить на лекции.

Литература

1. Бубнов В.А. Метод интегральных соотношений в задаче о взаимодействии вихревой нити с плоскостью / В.А. Бубнов, Р.Т. Галиуллин // Вопросы транспорта газа. М.: ВНИИГАЗ, 1985. С. 75–86.
2. Бубнов В.А. О монотонных решениях в задаче о взаимодействии вихревой нити с плоскостью / В.А. Бубнов, И.З. Габдуллин, Р.Т. Галиуллин // Прикладные вопросы аэродинамики: сб. научн. тр. Киев: Наукова думка, 1987. С. 82–85.
3. Бубнов В.А. Об одной форме уравнений турбулентности // Гидродинамика и теория упругости. Вып. 32. Днепропетровск: ДГУ, 1984. С. 29–36.
4. Бубнов В.А. Об изменении плотности в гидродинамическом потоке / В.А. Бубнов // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2014. № 4 (16). С. 9–20.
5. Бубнов В.А. Об одном толковании второго закона Ньютона / В.А. Бубнов // Вестник МГПУ. Серия «Естественные науки». 2016. № 4 (24). С. 9–20.
6. Бубнов В.А. Об ускорительных и замедляющих движениях в рамках второго закона Ньютона / В.А. Бубнов // Потенциал. 2017. № 4. С. 76–80.
7. Бубнов В.А. Гидродинамика: Механика частицы жидкости / В.А. Бубнов. М.: Ленанд, 2018. 304 с.
8. Гольдшик М.А. Вихревые потоки / М.А. Гольдшик. Новосибирск: Наука, 1984. 365 с.
9. Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А.А. Дородницын // Прикладная мех. и тех. физ. 1960. № 3. С. 111–118.
10. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе, под ред. И.А. Кибелю; Гос. изд. физ.-мат. литературы. Ч. II. 4-е изд., перераб. и доп. М., 1963. 729 с.
11. Предводителев А.С. О молекулярно-кинетическом обосновании уравнений гидродинамики / А.С. Предводителев // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1948. № 4. С. 545–560.
12. Bubnov V.A. Convective Heat and Mass Transfer in Insulated Trailing Swirl / V.A. Bubnov. New-York: Begell House Inc. Publishers, 1998. 174 p.
13. Gentry R.C. Hurricane modification / R.C. Gentry // Weather and climate modification / ed. by W. Hess. New-York, 1974. P. 497–551.

Literatura

1. Bubnov V.A. Metod integral'ny'x sootnoshenij v zadache o vzaimodejstvii vixrevoj niti s ploskost'yu / V.A. Bubnov, R.T. Galiullin // Voprosy' transporta gaza. M.: VNIIGAZ, 1985. S. 75–86.

2. *Bubnov V.A.* O monotonnykh resheniyakh v zadache o vzaimodejstvii vixrevoj niti s ploskost'yu / V.A. Bubnov, I.Z. Gabdullin, R.T. Galiullin // *Prikladny'e voprosy ae'rodinamiki: sb. nauchn. tr.* Kiev: Naukova dumka, 1987. S. 82–85.
3. *Bubnov V.A.* Ob odnoj forme uravnenij turbulentnosti // *Gidrodinamika i teoriya uprugosti.* Vy'p. 32. Dnepropetrovsk: DGU, 1984. S. 29–36.
4. *Bubnov V.A.* Ob izmenenii plotnosti v gidrodinamicheskom potoke / V.A. Bubnov // *Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki».* 2014. № 4 (16). S. 9–20.
5. *Bubnov V.A.* Ob odnom tolkovanii vtorogo zakona N'yutona / V.A. Bubnov // *Vestnik MGPU. Seriya «Estestvenny'e nauki».* 2016. № 4 (24). S. 9–20.
6. *Bubnov V.A.* Ob uskoritel'ny'x i zamedlyayushhix dvizheniyax v ramkax vtorogo zakona N'yutona / V.A. Bubnov // *Potencial.* 2017. № 4. S. 76–80.
7. *Bubnov V.A.* *Gidrodinamika: Mexanika chasticzy zhidkosti / V.A. Bubnov.* M.: Lenand, 2018. 304 s.
8. *Gol'dshik M.A.* *Vixrevy'e potoki / M.A. Gol'dshik.* Novosibirsk: Nauka, 1984. 365 s.
9. *Dorodniczy'n A.A.* Ob odnom metode resheniya uravnenij laminarnogo pogranichnogo sloya / A.A. Dorodniczy'n // *Prikladnaya mex. i tex. fiz.* 1960. № 3. C. 111–118.
10. *Kochin N.E.* *Teoreticheskaya gidromexanika / N.E. Kochin, I.A. Kibel', N.V. Roze,* pod red. I.A. Kibelu; Gos. izd. fiz.-mat. literatury'. Ch. II. 4-e izd., pererab. i dop. M., 1963. 729 s.
11. *Predvoditelev A.S.* O molekulyarno-kineticheskom obosnovanii uravnenij gidrodinamiki / A.S. Predvoditelev // *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie texnicheskix nauk.* 1948. № 4. S. 545–560.
12. *Bubnov V.A.* *Convective Heat and Mass Transfer in Insulated Trailing Swirl / V.A. Bubnov.* New-York: Begell House Inc. Publishers, 1998. 174 p.
13. *Gentry R.C.* *Hurricane modification / R.C. Gentry // Weather and climate modification / ed. by W. Hess.* New-York, 1974. P. 497–551.

V.A. Bubnov

Methodical Analysis of the Hydrodynamic Structure of Vortex Filament

In the course of general physics little attention is given to the theory of vortex motions. However, in the framework of the interdisciplinary connections between the course of general physics and discipline “Physics of natural phenomena” studied by students-geographers, the theme “A vortex thread simulating dynamic phenomena in tornadoes and hurricanes” seems to be relevant. In this regard, this work describes the methods of the analysis of the structure of vortex filament and shows the correspondence between currents in the vortex filament to currents in real hurricanes.

Keywords: isolated vortex; hydrodynamic characteristics; in-situ measurements in hurricanes; the vortex filament.